풀이

# STEP II 2003, 문제 10

역학 • 마찰이 있는 구속 운동

> **STEP II 2003, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q10

## 핵심 아이디어

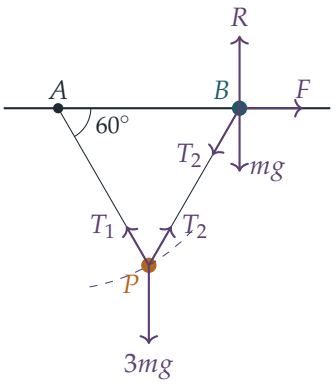
처음에 $AP = PB = AB = \ell$이므로 $APB$는 정삼각형(equilateral triangle)이다. $AP$가 팽팽하게(taut) 유지되므로 $P$는 $A$를 중심으로 하는 원 위를 움직인다. 모든 것이 정지 상태에서 출발하므로 구심(centripetal) 항이 없고, $P$의 초기 가속도는 그 원의 접선(tangent) 방향이어야 한다. 이것으로 가속도의 방향이 정해진다. 또한 $P$는 항상 $AB$ 위에 놓인 이등변삼각형(isosceles triangle)의 꼭짓점에 있으므로, $P$의 수평 위치는 언제나 $B$의 수평 위치의 절반이다. 마지막 부분에서는 $B$와 $P$ 각각에 대해 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 쓴다. $P$에 대해 가속도 방향($AP$에 수직인 방향)으로 성분을 분해하면(resolving) $AP$의 장력(tension)은 전혀 나타나지 않는다.

## 풀이

$B$와 $P$를 입자(particle)로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는 것으로 모형화한다. 줄의 두 부분은 모두 팽팽하게 유지된다. $A$를 원점으로 잡고, 철사가 $x$축을 따라 놓이며 $B$가 처음에 $(\ell, 0)$에 있도록 한다. 각 $PAB$를 $\theta$라 하자. $AP = PB = \ell$이므로

$$B = (2\ell\cos\theta,\, 0), \qquad P = (\ell\cos\theta,\, -\ell\sin\theta),$$

이고, 처음에 $\theta = \frac{\pi}{3}$이다.




### $P$의 가속도의 방향

$AP = \ell$이 고정되어 있으므로 $P$는 반지름이 $\ell$이고 $A$를 중심으로 하는 원(그림의 점선) 위를 움직인다. 원 위를 움직이는 점의 가속도는 중심을 향하는 성분 $\ell\dot{\theta}^2$와 접선 방향의 성분 $\ell\ddot{\theta}$를 가진다. 계가 정지 상태에서 놓이므로 처음에는 $\dot{\theta} = 0$이다. 따라서 $P$의 초기 가속도는 접선 방향, 즉 $AP$에 수직인 방향을 향한다.

$AP$는 수평과 $60°$의 각을 이루므로, $AP$에 수직인 방향은 수평과 $30°$의 각을 이룬다. 가속도의 크기를 $a$라 하면

$$a_1 = a\cos 30° = \tfrac{\sqrt{3}}{2}a, \qquad a_2 = a\sin 30° = \tfrac{1}{2}a,$$

이고, 따라서 요구한 대로 $a_1 = \sqrt{3}\,a_2$이다.

$\theta$로 나타내면 다음과 같다. $P$의 위치를 미분하고 $\dot{\theta} = 0$을 대입하면 초기 가속도 $\ell\ddot{\theta}(-\sin\theta, -\cos\theta)$를 얻는다. $\ddot{\theta} > 0$이면 $P$는 아래쪽이면서 $A$ 쪽으로 움직인다. 그 크기는 $a = \ell\ddot{\theta}$이다.

### $B$의 가속도

$P$는 $AB$의 수직이등분선(perpendicular bisector) 위에 있으므로, $B$의 $x$좌표는 항상 $P$의 것의 정확히 두 배이다. 두 번 미분하면 $B$의 가속도가 항상 $P$의 수평 가속도의 두 배임을 알 수 있다. 따라서 요구한 대로 $B$의 초기 가속도는 크기가 $2a_1$이고 $A$를 향한다.

> ? **생각해 보기** $B$가 $A$ 쪽으로 움직인다고 말할 수 있는 이유는 무엇이며, 마찰력(friction)은 어느 방향으로 작용하는가?

$P$가 떨어지면 $\theta$가 증가하므로 $x_B = 2\ell\cos\theta$는 감소한다. 따라서 $B$는 $A$ 쪽으로 미끄러지고, $B$에 작용하는 마찰력은 $A$에서 멀어지는 방향(양의 $x$ 방향)으로 작용한다. 여기서는 $B$가 실제로 움직인다고 가정하고 있다. 문제에서 마찰력을 미끄러지는 동안의 값인 $\frac{\sqrt{3}}{6}R$로 주고 있으므로 이 가정이 확인된다.

### 초기 가속도의 크기

$AP$와 $PB$의 장력을 각각 $T_1$, $T_2$라 하자. $B$에 작용하는 수직항력(normal reaction)을 $R$, 마찰력을 $F = \frac{\sqrt{3}}{6}R$라 하자. $P$의 초기 가속도의 크기를 $a$로 쓰면 $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$이고, $B$의 가속도는 $A$를 향하는 $2a_1 = \sqrt{3}\,a$이다.

**구슬**(*bead*) $B$. 줄 $BP$는 $B$를 수평 아래 $60^\circ$ 방향으로, $A$ 쪽으로 당긴다. $B$는 연직 방향의 가속도가 없으므로 연직 방향으로 분해하면

$$R = mg + \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2.$$

이다. $A$를 향하는 방향을 양의 방향으로 잡고 수평 방향으로 분해하면

$$m(\sqrt{3}\,a) = \tfrac{1}{2}T_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\left(mg + \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2\right) = \tfrac{1}{4}T_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{6}mg,$$

이므로

$$T_2 = 4\sqrt{3}\,ma + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}mg. \tag{1}$$

이다.

**입자** $P$. $P$의 가속도 방향, 즉 수평 아래 $30^\circ$로 아래쪽이면서 $A$ 쪽을 향하는 방향으로 분해한다. 이 방향은 $AP$에 수직이므로 $T_1$은 아무 기여도 하지 않는다. 무게 $3mg$는 이 방향과 $60^\circ$의 각을 이루므로 $3mg\cos 60^\circ = \frac{3}{2}mg$만큼 기여한다. 장력 $T_2$는 $PB$를 따라, 수평 위 $60^\circ$로 위쪽이면서 $A$에서 멀어지는 방향으로 작용한다. 이것은 가속도 방향과 $150^\circ$의 각을 이루므로 $T_2\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}T_2$만큼 기여한다. 따라서

$$3ma = \tfrac{3}{2}mg - \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2. \tag{2}$$

이다. (1)을 (2)에 대입하면

$$3ma = \tfrac{3}{2}mg - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(4\sqrt{3}\,ma + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}mg\right) = \tfrac{3}{2}mg - 6ma - mg,$$

$$9ma = \tfrac{1}{2}mg,$$

이므로 $P$의 초기 가속도의 크기는

$$a = \frac{g}{18},$$

이고, 이는 요구한 결과이다.

이 답은 모순이 없다. (1)에서 $T_2 = \frac{8\sqrt{3}}{9}mg > 0$이므로 줄 $PB$는 팽팽하다. 그러면 $R = \frac{7}{3}mg > 0$이다. $P$에 대해 수평 방향으로 분해하면 $T_1 = T_2 + 6ma_1 = \frac{19\sqrt{3}}{18}mg > 0$이므로 $AP$도 팽팽하다.

## 검산

- 사용하지 않은 $P$의 연직 방향 식: $\frac{\sqrt{3}}{2}(T_1 + T_2) - 3mg = \frac{35}{12}mg - 3mg = -\frac{1}{12}mg$. 이는 $-3ma_2 = -3m\cdot\frac{g}{36}$와 같으며, 마땅히 그래야 한다.

- 수치적으로, $B$와 $P$의 위치를 미분하여 $a_1/a_2 \approx 1.7320508$과 $a_B/a_1 = 2$를 얻었다. 그다음 $g = 9.81$로 두고 세 힘의 방정식을 $T_1$, $T_2$, $\ddot{\theta}$에 대해 풀었다. 그 결과 $|a| = 0.545 = g/18$이고, $T_2/mg \approx 1.5396$, $R/mg \approx 2.3333$이었다.
- 마찰이 없다면 (1)은 $T_2 = 2\sqrt{3}\,ma$가 되고 (2)는 $6ma = \frac{3}{2}mg$를 주므로 $a = g/4$이다. 마찰은 운동을 늦춰야 하는데, 실제로 $g/18 < g/4$이다.

## 흔한 실수

- 구심 항을 포함하는 것. 놓는 순간에는 $\dot{\theta} = 0$이므로 가속도는 순전히 접선 방향이다.
- $T_2$가 $B$를 아래로 당겨 $R$를, 따라서 마찰력을 증가시킨다는 사실을 잊는 것. $R = mg$로 두면 틀린 답이 나온다.
- $P$에 대해 수평과 연직 방향으로 분해하는 것. 이 방법도 가능하지만 $T_1$이 들어오게 되어 식이 하나 더 필요하다. $AP$에 수직인 방향으로 분해하면 이것이 사라진다.

## STEP 너머

이것은 자유도(degree of freedom)가 1인 구속된 계(constrained system)이다. 즉 모든 것이 하나의 각 $\theta$로 정해진다. 위치를 $\theta$로 나타내고 미분하는 것은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 첫 단계이다. 라그랑주 역학에서는 $T_1$과 같은 구속력(constraint force)을 교묘한 방향 선택이 아니라 체계적인 방법으로 제거한다. 마찰은 그 틀에 깔끔하게 들어맞지 않는데, 이것이 이런 문제가 뉴턴 역학의 방법을 연습하기에 좋은 이유 중 하나이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 구속된 운동과 비등속 원운동을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.