풀이

STEP II 2003, 문제 1

순수수학 • 연립일차방정식

> **STEP II 2003, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q1

핵심 아이디어

미지수 x는 언제나 ax의 꼴로만 나타나고, y는 모든 방정식에서 계수가 -1이다. 따라서 이웃한 방정식끼리 빼면 y가 완전히 소거되고, 이렇게 얻은 두 식은 좌변이 같다. 그러므로 이 연립방정식은 b의 값이 하나일 때에만 해를 가지며(consistent), 해를 가지는 경우에는 자유매개변수(free parameter)가 하나 생긴다. 나머지 문제는 이 매개변수를 잘 고르는 것에 관한 것이다.

풀이

세 방정식에 차례로 (1), (2), (3)의 번호를 붙인다. (2)에서 (1)을 빼고, (3)에서 (2)를 빼면

$$ax - 2z = 4, \tag{A}$$

$$ax - 2z = b - 7. \tag{B}$$

을 얻는다. 연립방정식의 해는 모두 (A)와 (B)를 동시에 만족하므로, 해가 존재하려면 $4 = b - 7$, 즉 $b = 11$이어야 한다. 이는 a의 값에 관계없이 성립한다.

소문항 (i)

$a = 0$이면 방정식은 $-y - z = 3$, $-y - 3z = 7$, $-y - 5z = b$가 되고, x는 전혀 나타나지 않는다.

해가 존재한다면 앞의 관찰에 의해 $b = 11$이다.

역으로 $b = 11$이라 하자. 이제 식 (A)는 $-2z = 4$가 되므로 $z = -2$이고, (1)에서 $y =$

$-3-z=-1$이다. $y=-1, z=-2$를 세 방정식에 모두 대입하여 확인하면

$$1+2=3, \qquad 1+6=7, \qquad 1+10=11=b,$$

이므로 (x가 어떤 값이든) 해가 된다. 따라서 이 방정식은 $b=11$일 때, 그리고 그때에만 해를 가진다.

소문항 (ii)

이제 $a\neq 0$이고 $b=11$이다. $z=\lambda$라 두자. 식 (A)에서 $ax=4+2\lambda$이고, $a\neq 0$이므로 양변을 나눌 수 있다.

$$x=\frac{4+2\lambda}{a}.$$

그러면 (1)에서 $y=ax-z-3=4+2\lambda-\lambda-3=1+\lambda$이다.

이 값들은 (1)과 (2)만 사용하여 구한 것이므로, (3)도 만족하는지 확인해야 한다.

$$3ax-y-5z=3(4+2\lambda)-(1+\lambda)-5\lambda=12+6\lambda-1-6\lambda=11=b.$$

따라서 모든 수 λ에 대하여

$$x=\frac{4+2\lambda}{a}, \qquad y=1+\lambda, \qquad z=\lambda$$

는 $z=\lambda$인 해이며, 이것이 구하는 것이다. (사실 이것이 해의 **전부**이다. 어떤 해든 z는 어떤 값 λ를 가지고, 그러면 위의 계산에 의해 x와 y가 정해진다.)

생각해 보기 왜 식 (3)을 따로 확인해야 할까?

x와 y를 구할 때는 (1)과 (2)를 ((1)과 (A)의 꼴로) 사용했다. 미지수가 세 개인 방정식 세 개가 저절로 서로 들어맞는 것은 아니며, b가 들어오는 곳이 바로 (3)이다. $b=11$이라는 조건은 이 확인 과정에서 쓰인다.

소문항 (iii)

$a=2$일 때, 소문항 (ii)에 의해 모든 해는 $(x,y,z)=(2+\lambda,\ 1+\lambda,\ \lambda)$이다. 그러면

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (2+\lambda)^2+(1+\lambda)^2+\lambda^2 \\ &= 3\lambda^2+6\lambda+5 \\ &= 3(\lambda+1)^2+2, \end{aligned}$$

이고, 이 값은 정확히 $\lambda=-1$일 때 최솟값 2를 가진다. 따라서 구하는 해는

$$x=1, \qquad y=0, \qquad z=-1.$$

이다. 기하적으로 보면, 해 전체는 방향이 $(1,1,1)$인 직선을 이루고, 우리는 이 직선 위에서 원점에 가장 가까운 점을 찾은 것이다. 실제로 $(1,0,-1)\cdot(1,1,1)=0$이므로, 위치벡터(position vector)가 직선과 수직이며, 이는 마땅히 그래야 하는 결과이다.

소문항 (iv)

처음의 관찰에 의해 b는 11이어야 한다. $a = 0$이면 소문항 (i)에 의해 $y = -1, z = -2$이므로 $y^2 + z^2 = 5$가 되어 너무 크다. 따라서 $a \neq 0$이고, 소문항 (ii)에 의해 해는 $x = (4 + 2\lambda)/a$, $y = 1 + \lambda, z = \lambda$이다.

> **?** **생각해 보기** y와 z는 작게 유지하면서 x를 어떻게 엄청나게 크게 만들 수 있을까?

a가 나타나는 곳은 $x = (4 + 2\lambda)/a$뿐이다. λ를 고르면 y와 z가 정해지고, 그다음 a를 충분히 작게 하면 x를 원하는 만큼 크게 만들 수 있다.

$y^2 + z^2 = (1 + \lambda)^2 + \lambda^2 = 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 < 1$, 즉 $2\lambda(\lambda + 1) < 0$, 즉 $-1 < \lambda < 0$이어야 한다. $\lambda = -\frac{1}{2}$로 잡으면 $y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}$이고 $y^2 + z^2 = \frac{1}{2} < 1$이며, $x = 3/a$이다.

$$a = 10^{-6}$$

으로 고르면 $x = 3 \times 10^6 > 10^6$이다. 따라서 ($b = 11$과 함께) $a = 10^{-6}$이 조건을 만족한다.

더 일반적으로, $-1 < \lambda < 0$이면 $2 < 4 + 2\lambda < 4$이므로, 조건에 맞는 해는 정확히 $0 < a < 4 \times 10^{-6}$일 때 존재한다. a가 음수이면 $x < 0$이 되므로 불가능하다.

검산

- $a = 2, (x, y, z) = (1, 0, -1)$을 원래 방정식에 대입하면 $2 - 0 + 1 = 3, 4 - 0 + 3 = 7$, $6 - 0 + 5 = 11$이다.
- 소문항 (iv)에서 $a = 10^{-6}, (x, y, z) = (3 \times 10^6, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$이면 $3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3, 6 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 7, 9 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 11$이다.
- 무작위로 고른 수백 개의 a와 λ에 대하여, 소문항 (ii)의 공식이 세 방정식을 모두 만족함을 정확한 분수 계산으로 확인했으며, λ에 대한 격자 탐색(grid search)으로 소문항 (iii)에서 $\lambda = -1$일 때 최솟값이 2임을 확인했다.

흔한 실수

- 두 방정식에서 x와 y를 구하고 나머지 하나를 확인하는 것을 잊는다.
- 소문항 (iv)에서 y와 z가 "둘 다 작을 수는 없다"고 생각하여 불가능하다고 단정한다. 둘 다 작을 수 있다. $y - z = 1$에서 강제되는 것은 $y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}$뿐이다.

STEP 너머

이것은 선형대수학(linear algebra)에서 계수(rank)와 해의 존재성(consistency)을 처음 맛보는 문제이다. 여기서 계수행렬(coefficient matrix)은 특이행렬(singular matrix)이므로(행들이 $r_1 - 2r_2 + r_3 = 0$을 만족한다), 우변이 같은 관계식을 만족하는지에 따라 연립방정식은 해가 없거나, 해가 직선 하나 전체를 이룬다. 소문항 (iv)는 또한 특이행렬에 가까운 연립방정식이 수치 계산에서 왜 위험한지도 보여 준다. 아주 작은 계수 a가 엄청나게 큰 해를 만들어 내기 때문이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 소문항 (iii)과 같은 최소 노름 해(least-norm solution)를 포함하여 이 모든 내용을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.