풀이

STEP I 2003, 문제 9

역학 • 한 점을 지나는 포물체

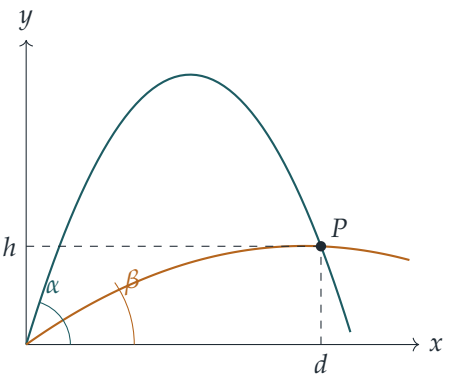
> **STEP I 2003, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q9

핵심 아이디어

수평 변위와 수직 변위를 적고, 시간을 소거한 다음 $\sec^2\theta$를 $1+\tan^2\theta$로 바꾼다. 그러면 궤적(trajectory)의 방정식은 $T=\tan\theta$에 대한 이차방정식이 된다. 그 뒤로는 모든 것이 이 이차방정식에 관한 문제이다. 각이 두 개라는 것은 서로 다른 두 실근(real root)이 있다는 뜻이므로 판별식(discriminant)을 살펴본다. 그리고 $\alpha+\beta$는 $\tan(\alpha+\beta)$의 공식을 통해 두 근의 합과 곱으로 결정된다.

풀이

입자는 중력만 받으며 자유롭게 움직인다고(공기 저항(air resistance)은 없다고) 모형화하고, 원점을 발사 지점으로, x축을 P 쪽을 향하는 수평 방향으로, y축을 연직 위쪽으로 잡는다. 따라서 P는 $d>0$인 점 (d,h)이다. $h>0$, 즉 P가 발사 지점보다 위에 있다고 하자. $h\le 0$인 경우는 마지막에 다시 다룬다.



T에 대한 이차방정식

수평 속도는 $V\cos\theta$로 일정하고, 수직 운동은 일정한 가속도 $-g$를 가지므로 시각 t에서

$$x = Vt\cos\theta, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

이다. 입자는 시각 $t = d/(V\cos\theta)$에 $x = d$에 도달한다(입자가 P 쪽으로 움직이므로 여기서 $\cos\theta > 0$이다). 이것을 y에 대입하고 $y = h$로 놓으면, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$를 이용하여

$$h = d\tan\theta - \frac{gd^2}{2V^2\cos^2\theta} = dT - \frac{gd^2}{2V^2}(1+T^2),$$

를 얻는다. 이제 양변에 $\dfrac{2V^2}{gd^2} = \dfrac{2k}{d}$를 곱하면

$$\frac{2kh}{d} = 2kT - (1+T^2), \qquad \text{즉,} \qquad T^2 - 2kT + \frac{2kh}{d} + 1 = 0,$$

이 되어 원하는 식을 얻는다.

서로 다른 두 각

주어진 V(따라서 주어진 k)에 대하여, 가능한 발사각은 탄젠트 값이 이 이차방정식의 근이 되는 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$이다. 이 구간에서 tan는 순증가하므로, 서로 다른 실근 T는 서로 다른 각을 준다. 따라서 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하며, 이는 판별식이 양수일 때와 정확히 일치한다.

$$4k^2 - 4\left(\frac{2kh}{d} + 1\right) > 0 \iff k^2d^2 - 2h(kd) - d^2 > 0 \iff (kd-h)^2 > h^2 + d^2,$$

여기서는 $d^2 > 0$을 곱한 뒤 kd에 대하여 완전제곱식을 만들었다(completing the square).

> **생각해 보기** 부등식을 제곱하면 잘못될 수 있는데, 주어진 조건이 왜 $(kd-h)^2 > h^2 + d^2$을 함의하는가?

$kd > h + \sqrt{h^2+d^2}$이면 $kd - h > \sqrt{h^2+d^2} > 0$이다. 양변이 모두 양수이므로 제곱해도 부등식이 유지된다: $(kd-h)^2 > h^2 + d^2$. 따라서 판별식이 양수이고 서로 다른 두 근 T가 존재하므로, 서로 다른 두 발사각이 존재한다.

(역(converse)도 성립한다. $(kd-h)^2 > h^2+d^2$이 되는 다른 경우는 $kd < h - \sqrt{h^2+d^2}$이지만, $\sqrt{h^2+d^2} > |h|$이므로 우변은 음수인 반면 $kd = V^2/g > 0$이다. 따라서 두 각이 가능한 것은 **정확히** $kd > h + \sqrt{h^2+d^2}$일 때이다.)

두 각은 모두 실제로 수평선 **위쪽**을 향한다. 두 근의 합은 $2k > 0$이고 곱은 $1 + 2kh/d > 0$($h > 0$이므로)이므로 두 근은 모두 양수이다.

두 각의 합

두 근을 $\tan\alpha$와 $\tan\beta$라 하자. 이차방정식으로부터

$$\tan\alpha + \tan\beta = 2k, \qquad \tan\alpha\tan\beta = 1 + \frac{2kh}{d}.$$

이다. 곱은 1이 아니므로($kh/d \neq 0$이므로) $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2}$이고, 덧셈정리(compound-angle formula)를 적용할 수 있다.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2k}{-2kh/d} = -\frac{d}{h}.$$

k가 약분되어 사라졌다는 점에 주목하자. 두 각의 합은 속력에 의존하지 않는다.

> **생각해 보기** $\tan(\alpha+\beta) = -d/h$는 무수히 많은 해를 가진다. 그중 어느 것이 $\alpha+\beta$인가?

$\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$임을 보였으므로 $0 < \alpha+\beta < \pi$이다. 게다가 $\tan(\alpha+\beta) < 0$이므로 $\alpha+\beta$는 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에 속한다. $\arctan(d/h) \in (0, \frac{\pi}{2})$이고 $\tan(\pi - u) = -\tan u$이므로, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에서 탄젠트 값이 $-d/h$인 유일한 각은 $\pi - \arctan(d/h)$이다. 그러므로

$$\alpha + \beta = \pi - \arctan\left(\frac{d}{h}\right),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

이를 보는 멋진 방법이 있다. $\arctan(d/h)$는 OP와 연직 위쪽 방향이 이루는 각이므로, P의 앙각(angle of elevation)을 γ라 하면 $\pi - \arctan(d/h) = \frac{\pi}{2} + \gamma$이다. 그러면 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}$이다. 즉, 두 발사 방향은 OP와 연직선이 이루는 각의 이등분선에 대하여 대칭이다.

검산

- $h = 0$이면(목표물이 같은 높이에 있으면) 공식은 $\alpha+\beta = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$를 준다. 이는 같은 수평 도달 거리를 주는, 익히 알려진 서로 여각인 두 각이다.
- $d = 3, h = 4, k = 4$로 잡자. 그러면 $kd = 12 > 4 + 5$이고, 근은 $T = 4 \pm \sqrt{13/3}$이며 $\alpha \approx 1.4078$, $\beta \approx 1.0903$이다. 따라서 $\alpha+\beta \approx 2.4981$이고, 이는 $\pi - \arctan(0.75) \approx 2.4981$과 같다.
- 수천 개의 무작위 d, h, k에 대하여 두 각 각각으로 비행을 수치 시뮬레이션하면 궤적이 (d, h)를 지나며, 조건과 두 각의 합이 모두 확인된다.

흔한 실수

- $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$를 잊어서 T에 대한 이차방정식에 이르지 못한다.

- $\alpha + \beta = \arctan(-d/h) = -\arctan(d/h)$라고 쓰는데, 이 값은 음수이다. 역탄젠트(inverse tangent)는 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$의 각만 돌려주므로, $\alpha + \beta$의 범위를 이용하여 올바른 분지(branch)를 골라야 한다.
- $h < 0$인 경우(목표물이 발사 지점보다 아래에 있는 경우)를 주의 없이 다룬다. 이때는 한 근이 음수일 수 있으며, 올바른 일반적인 명제는 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \arctan(h/d)$이다. 이것은 $h > 0$일 때에만 문제에 주어진 형태와 일치한다.

STEP 너머

두 각이 하나로 합쳐지는 경계의 경우 $kd = h + \sqrt{h^2 + d^2}$는 속력 V로 발사한 모든 궤적의 **포락선**(envelope)을 그린다. 이것이 "안전 포물선(parabola of safety)" $y = \dfrac{V^2}{2g} - \dfrac{gx^2}{2V^2}$이다. 그 안쪽의 점은 두 가지 방법으로, 그 위의 점은 한 가지 방법으로 맞힐 수 있고, 바깥쪽의 점은 전혀 맞힐 수 없다. 곡선족의 포락선은 방정식과 그 방정식을 매개변수에 대해 미분한 식을 동시에 풀어서 구하는데, 이는 미분방정식(differential equations)과 광학(optics)에서 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 구속 운동을 이와 같은 세심함으로 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.