풀이

STEP I 2003, 문제 8

순수수학 • 로지스틱 미분방정식

> **STEP I 2003, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q8

핵심 아이디어

"A가 B로 바뀌는 비율"을 도함수(derivative)로 옮긴다. 이것은 B의 부피가 증가하는 비율이다. $x = 1 - y$이므로, 이로부터 y만으로 이루어진 변수분리형(separable variables) 미분방정식(differential equation)을 얻고, 부분분수(partial fractions)로 적분을 마무리한다. 마지막 부분은 $x = 1 - y$에 대한 식이 언젠가 0이 될 수 있는지를 묻는 것이며, 그 답은 지수함수(exponential)가 결코 무한대가 되지 않는다는 사실에 달려 있다.

풀이

방정식 세우기

B의 부피는 yV이고, V는 일정하다. A는 $kVxy$의 비율로 B로 바뀌므로, B의 부피는 그 비율로 증가한다:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(yV) = kVxy \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = kxy = ky(1-y),$$

여기서 V로 나누고 $x = 1 - y$를 이용하였다. (같은 이야기로, A의 부피는 이 비율로 줄어든다: $V\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -kVxy$이며, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$이므로 이는 같은 내용이다.)

방정식 풀기

처음에 $x > 0$이고 $y > 0$이므로 $0 < y < 1$이다. $0 < y < 1$인 동안에는 $y(1-y)$로 나누어 변수를 분리할 수 있다:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(1-y)} = \int k\,\mathrm{d}t.$$

부분분수로 $\dfrac{1}{y(1-y)} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{1-y}$이므로

$$\ln y - \ln(1-y) = kt + c,$$
$$\ln \frac{y}{1-y} = kt + c,$$

이다. 여기서 y와 $1-y$가 모두 양수라는 사실을 이용했으므로 절댓값 기호는 필요 없다. 양변에 지수함수를 취하고 $D = \mathrm{e}^c$로 쓰면

$$\frac{y}{1-y} = D\mathrm{e}^{kt}.$$

그러면 $y = D\mathrm{e}^{kt} - yD\mathrm{e}^{kt}$이므로 $y\left(1 + D\mathrm{e}^{kt}\right) = D\mathrm{e}^{kt}$이고

$$y = \frac{D\mathrm{e}^{kt}}{1 + D\mathrm{e}^{kt}},$$

즉 요구된 식을 얻는다. $t = 0$을 대입하면 $D = \dfrac{y_0}{1-y_0} = \dfrac{y_0}{x_0}$임을 알 수 있다. 여기서 x_0과 y_0은 초깃값이다. 특히 $D > 0$이다.

생각해 보기 적분을 하기 위해 $0 < y < 1$이라고 가정하였다. 이것이 모든 시간에 대해 계속 성립한다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

그렇지 않다고 가정하고, y가 처음으로 0 또는 1에 도달하는 시각을 T라 하자. $0 \le t < T$에서는 위의 풀이가 유효하므로, 그 구간에서 y는 위의 식으로 주어진다. y는 연속(continuous)이므로 $y(T)$는 $t \to T$일 때 그 식의 극한(limit), 즉 $D\mathrm{e}^{kT}/(1 + D\mathrm{e}^{kT})$이다. $D > 0$이므로 이 값은 0과 1 사이에 엄격하게 놓이며, 이는 모순이다. 따라서 모든 t에 대해 $0 < y < 1$이고, 위의 식은 모든 t에 대해 성립한다.

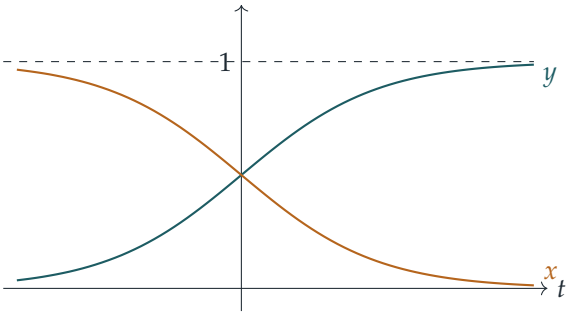
A는 언젠가 완전히 바뀌는가?

그렇지 않다. 위의 식으로부터

$$x = 1 - y = \frac{1}{1 + D\mathrm{e}^{kt}},$$

이고, 모든 t에 대해 $D\mathrm{e}^{kt}$는 유한하므로 모든 시각에서 $x > 0$이다. 즉 A의 일부는 항상 남아 있다. 그러나 $t \to \infty$일 때 ($k > 0$이고 $D > 0$이므로) $D\mathrm{e}^{kt} \to \infty$이고, 따라서 $x \to 0$, $y \to 1$이다. 변환은 완료에 한없이 가까워지지만 유한한 시간 안에 끝나지는 않는다.

이는 물리적으로도 타당하다. 반응 속도 $kVxy$는 남아 있는 A의 양에 비례하므로, A가 줄어들수록 반응이 느려진다.



그림($D = k = 1$인 경우)은 1에 다가가는 y의 S자 모양 로지스틱 곡선(logistic curve)과 0에 다가가는 x의 곡선을 보여 준다. 두 곡선 모두 결코 극한값에 도달하지 않는다.

검산

- 답을 미분해 본다: $u = De^{kt}$로 두면 $y = u/(1+u)$이고 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = ku/(1+u)^2 = ky(1-y)$이므로 예상대로이다.
- $D = k = 1$일 때(즉 같은 부피에서 시작할 때) 식은 $t = \ln 3$에서 $y = \frac{3}{4}$를 준다. 또한 k와 초깃값을 무작위로 200번 골라 방정식을 수치적으로 단계별로 계산해 보았는데, 결과가 식과 10^{-12} 이내로 일치했고 x는 내내 양수로 유지되었다.

흔한 실수

- "극한에서 $y = 1$"을 "어떤 시각에 $y = 1$"로 여기는 것. $t \to \infty$일 때의 극한은 어떤 유한한 시각에서도 실제로 도달되지 않는다.
- $\ln(y/(1-y))$ 단계에 $0 < y < 1$이 필요하다는 것을 잊거나, 그 조건이 왜 계속 유지되는지 말하지 않는 것.

STEP 너머

방정식 $\dot{y} = ky(1-y)$는 로지스틱 방정식(logistic equation)으로, 자원에 의해 제한되는 성장을 나타내는 표준 모형이다. 여기서 $y = 0$과 $y = 1$은 평형해(equilibrium solution)이며, 미분방정식의 유일성 정리(uniqueness theorem)에 따르면 다른 어떤 해도 이들과 교차하거나 맞닿을 수 없다. 이것이 마지막 부분을 해결하는 더 깔끔한 방법이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)은 로지스틱 방정식과 이런 종류의 안정성 분석을 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.