풀이

STEP I 2003, 문제 7

순수수학 • 자릿수와 나누어떨어짐

> **STEP I 2003, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q7

핵심 아이디어

$N = 100a + 10b + c$로 쓰고 $S = N$으로 놓으면 세 자릿수에 대한 방정식 하나를 얻는다. 이를

$$99a + (10b - b^2) = c^3 - c,$$

로 정리하면 첫 문단의 두 사실이 그대로 들어맞는다. b에 관한 항은 0과 25 사이에 갇혀 있고, $99a$와 $c^3 - c$는 모두 3의 배수이다. 첫째 사실에 따르면 $c^3 - c$는 99의 배수보다 조금 큰 값이어야 하고, 둘째 사실은 b가 될 수 있는 값을 줄여 준다. 그러고 나면 손으로 확인할 경우가 몇 개밖에 남지 않는다.

풀이

두 가지 예비 사실

완전제곱식(completing the square)으로 만들면

$$10k - k^2 = 25 - (5 - k)^2.$$

$(5 - k)^2 \geq 0$이므로 $10k - k^2 \leq 25$이다. $0 \leq k \leq 9$이므로 $-4 \leq 5 - k \leq 5$이고, 따라서 $(5 - k)^2 \leq 25$, 곧 $10k - k^2 \geq 0$이다. (등호는 0 쪽에서는 $k = 0$일 때, 25 쪽에서는 $k = 5$일 때 성립한다.)

다음으로, $k - 1, k, k + 1$은 연속한 세 정수이므로 그중 정확히 하나가 3의 배수이다. 따라서 이들의 곱 $k(k - 1)(k + 1)$은 3으로 나누어떨어진다. (이는 $0 \leq k \leq 9$일 때뿐 아니라 모든 정수 k에 대하여 성립한다.)

수 찾기

$N = 100a + 10b + c$라 하자. 여기서 각 자리의 숫자는 $1 \le a \le 9$ ($N \ge 100$이므로), $0 \le b, c \le 9$이다. 그러면 $S = a + b^2 + c^3$이고

$$\begin{aligned} S = N &\iff a + b^2 + c^3 = 100a + 10b + c \\ &\iff 99a + (10b - b^2) = c^3 - c = (c-1)c(c+1). \qquad (*) \end{aligned}$$

? **생각해 보기** 왜 $10b - b^2$을 $99a$와 같은 쪽에 두는가?

그것이 바로 방금 다루는 법을 익힌 조합이기 때문이다. $t = 10b - b^2$이라 하면 첫째 사실에 의해 $0 \le t \le 25$이고, $99a$는 25보다 훨씬 큰 99의 배수이다. 따라서 $(*)$는 $c^3 - c$가 99의 배수에 작은 "나머지" t를 더한 값이라는 뜻이고, 이 덕분에 경우가 매우 빠르게 좁혀진다.

b의 범위 좁히기. 둘째 사실에 의해 3은 $c^3 - c = (c-1)c(c+1)$을 나누고, 3은 $99a$도 나눈다. 따라서 $(*)$에 의해 3은 $t = b(10-b)$를 나눈다. $10 - b \equiv 1 - b \pmod 3$이므로 $b \equiv 0$ 또는 $b \equiv 1 \pmod 3$이어야 한다. 가능한 경우는

b	0	1	3	4	6	7	9
$t = 10b - b^2$	0	9	21	24	24	21	9

이므로 $t \in \{0, 9, 21, 24\}$이다. ($b = 2, 5, 8$이면 $t = 16, 25, 16$이 되어 어느 것도 3으로 나누어 떨어지지 않는다.)

c의 범위 좁히기. $a \ge 1$이고 $t \ge 0$이므로 $(*)$에서 $c^3 - c \ge 99$이다. $c^3 - c$의 값은

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c^3 - c$	0	0	6	24	60	120	210	336	504	720

이므로 $c \ge 5$이다.

경우 나누기. 각 $c \ge 5$에 대하여 구간 $[c^3 - c - 25,\ c^3 - c]$ 안에 놓이는 배수 $99a$ (단, $1 \le a \le 9$)가 있어야 하고, 이때 $t = c^3 - c - 99a$는 $0, 9, 21, 24$ 중 하나여야 한다.

- $c = 5$: $c^3 - c = 120$. $[95, 120]$ 안에 있는 99의 배수는 99뿐이므로 $a = 1$, $t = 21$이고, 따라서 $b = 3$ 또는 $b = 7$이다. 이로부터 $N = 135$와 $N = 175$를 얻는다.
- $c = 6$: $c^3 - c = 210$. $[185, 210]$ 안에 있는 99의 배수는 198뿐이므로 $a = 2$, $t = 12$이다. 그런데 12는 $0, 9, 21, 24$ 중 어느 것도 아니다 (실제로 $10b - b^2 = 12$는 정수근을 갖지 않는다). 해가 없다.
- $c = 7$: $c^3 - c = 336$. 가까운 배수는 297과 396인데, 둘 다 $[311, 336]$ 안에 있지 않다. 해가 없다.
- $c = 8$: $c^3 - c = 504$. $[479, 504]$ 안에 있는 99의 배수는 495뿐이므로 $a = 5$, $t = 9$이고, 따라서 $b = 1$ 또는 $b = 9$이다. 이로부터 $N = 518$과 $N = 598$을 얻는다.

- $c = 9$: $c^3 - c = 720$. 가까운 배수는 693과 792인데, 둘 다 $[695, 720]$ 안에 있지 않다. 해가 없다.

위의 모든 단계는 거꾸로도 성립하므로 이 네 수는 실제로 $S = N$을 만족한다. 직접 확인하면

$$135 : 1 + 3^2 + 5^3 = 1 + 9 + 125 = 135, \quad 175 : 1 + 7^2 + 5^3 = 1 + 49 + 125 = 175,$$
$$518 : 5 + 1^2 + 8^3 = 5 + 1 + 512 = 518, \quad 598 : 5 + 9^2 + 8^3 = 5 + 81 + 512 = 598.$$

따라서 $S = N$을 만족하는 수는 정확히

$$N = 135, \quad 175, \quad 518, \quad 598.$$

이다.

검산

세 자리 수 900개 모두에 대하여 $a + b^2 + c^3$을 계산하는 전수 조사(brute-force search)를 하면 정확히 135, 175, 518, 598을 얻으며, 이는 경우 나누기의 결과와 일치한다. 구조적으로 깔끔한 확인 방법도 있다. 각 쌍에서 두 b 값의 합은 10이다 ($3 + 7$과 $1 + 9$). 이는 필연적인데, b를 $10 - b$로 바꾸어도 $t = 10b - b^2$이 변하지 않기 때문이다.

흔한 실수

- $a \geq 1$임을 잊고, 세 자리 수가 아닌 000이나 001 같은 "해"를 받아들이는 실수.
- 주어진 a와 c에 대하여 b를 하나 찾고 멈추는 실수: $t(b) = t(10 - b)$이므로 해는 쌍으로 나타난다.
- 3으로 나누어떨어진다는 사실만 쓰고 범위 $0 \leq t \leq 25$를 쓰지 않는 실수: 각 c에 대하여 가능한 a를 많아야 하나로 줄여 주는 것은 바로 이 범위이다.

STEP 너머

자기 자신의 각 자리 숫자의 거듭제곱으로 만든 합과 같아지는 수는 고전적인 수학 놀이의 소재이다 ($153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$과 같은 암스트롱 수(Armstrong number), 곧 "나르시시스트 수(narcissistic number)"가 가장 잘 알려진 예이다). 그 밑에 깔린 진지한 아이디어는 여기서 쓴 것과 같다. 양변의 크기를 제한하여 탐색을 유한하게 만든 다음, 합동식(congruence)을 이용해 경우를 쳐내는 것이다. 크기 추정과 모듈러 연산(modular arithmetic)을 이렇게 짝지어 쓰는 방법은 많은 디오판토스 방정식(Diophantine equation)을

푸는 원동력이 된다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식과 그 활용을 훌륭하게 소개하는 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.