풀이

STEP I 2003, 문제 6

순수수학 • 부분분수를 이용한 적분

> **STEP I 2003, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q6

핵심 아이디어

두 이차식(quadratic) 모두 인수분해(factorise)되므로, 자연스러운 도구는 부분분수(partial fractions)이다. "여러 경우"는 두 일차 인수가 일치하는 순간에서 생긴다. 이때는 부분분수가 성립하지 않으므로 대신 완전제곱식(perfect square)을 적분한다. 소문항 (ii)를 시작하기 전에 두 이차식을 잘 살펴보아라. 변수를 간단히 평행이동하면 한 식이 다른 식으로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

$2 \times a = 2a$이고 $2 + a = a + 2$이므로 이차식은 다음과 같이 인수분해된다.

$$x^2 + (a+2)x + 2a = (x+2)(x+a).$$

$a > 0$이므로 $0 \le x \le 1$에서 두 인수는 모두 양수이다. 따라서 피적분함수(integrand)는 구간 전체에서 연속(continuous)이고, 모든 $a > 0$에 대하여 적분이 존재한다. 두 인수는 정확히 $a = 2$일 때 같아지며, 이것이 경우를 나누는 기준이 된다.

$a \neq 2$인 경우. 두 인수는 서로 다르고,

$$\frac{1}{(x+2)(x+a)} = \frac{1}{a-2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+a}\right),$$

이다. 이는 통분하여 확인할 수 있다. 분자가 $(x+a) - (x+2) = a - 2$가 된다. $[0,1]$에서

$x+2$와 $x+a$가 모두 양수이므로 로그에 절댓값 기호(modulus signs)가 필요 없다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x+a)} &= \frac{1}{a-2}\Big[\ln(x+2)-\ln(x+a)\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{a-2}\Big(\ln 3-\ln(1+a)-\ln 2+\ln a\Big)\\ &= \frac{1}{a-2}\ln\left(\frac{3a}{2(a+1)}\right).\end{aligned}$$

생각해 보기 $0<a<2$이면 인수 $\frac{1}{a-2}$는 음수이다. 피적분함수가 양수이므로 답은 양수여야 하는데, 그래도 답이 양수인가?

그렇다. $\dfrac{3a}{2(a+1)}<1 \iff 3a<2a+2 \iff a<2$이므로, $0<a<2$이면 로그도 음수가 되어 몫은 양수이다. 마찬가지로 $a>2$이면 둘 다 양수이다. 모든 부분이 양수인 형태를 원한다면, $0<a<2$일 때의 답을 $\dfrac{1}{2-a}\ln\left(\dfrac{2(a+1)}{3a}\right)$로 쓰면 된다. 이는 같은 값이다.

$a=2$인 경우. 이제 피적분함수는 $(x+2)^{-2}$이고,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = \left[-\frac{1}{x+2}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

소문항 (ii)

여기서 이차식은 $u^2+au+a-1=(u+1)(u+a-1)$이다. 하지만 같은 계산을 반복하기 전에 $u=x+1$로 치환(substitution)해 보자.

$$(x+1)^2+a(x+1)+a-1 = x^2+(a+2)x+2a.$$

이는 정확히 소문항 (i)의 이차식이다. 또한 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$이고, $u=1,2$는 $x=0,1$에 대응한다. 따라서

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+au+a-1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+(a+2)x+2a},$$

이고, 답은 소문항 (i)과 같다.

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+au+a-1} = \begin{cases}\dfrac{1}{a-2}\ln\left(\dfrac{3a}{2(a+1)}\right), & a\neq 2,\\[2ex] \dfrac{1}{6}, & a=2.\end{cases}$$

직접 계산할 수도 있다. $[1,2]$에서 $u+1>0$이고 $u+a-1\geq a>0$이므로 피적분함수는 역시 연속이며, 두 인수는 정확히 $a-1=1$, 즉 $a=2$일 때 일치한다. 부분분수를 이용하면 $\frac{1}{a-2}\big[\ln\frac{u+1}{u+a-1}\big]_1^2 = \frac{1}{a-2}\big(\ln\frac{3}{a+1}-\ln\frac{2}{a}\big)$를 얻는데, 이는 같은 식이다.

검산

- $a = 2$**에서의 연속성.** $a \to 2$일 때 로그는 $\ln 1 = 0$으로 수렴하므로, 공식은 $0/0$ 꼴이 된다. 그 극한(limit)은 $a = 2$에서 $\ln 3a - \ln(2a+2)$의 미분계수(derivative), 즉 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$이고, 이는 특수한 경우의 값과 일치한다. 두 경우는 마땅히 그래야 하듯 매끄럽게 이어진다.
- **특수한 값.** $a = 1$이면 (i)의 피적분함수는 $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$이고, 공식은 $-\ln\frac{3}{4} = \ln\frac{4}{3} \approx 0.2877$을 준다.
- **수치 계산.** $a = 1$, $a = 2$, 0과 2에 가까운 a, 그리고 20 이하의 무작위 a 값 200개에 대하여 두 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면, 공식과 10^{-10}보다 작은 오차로 일치한다.

흔한 실수

- 부분분수 계수 $\frac{1}{a-2}$가 정의되지 않는 $a = 2$인 경우를 빠뜨린다.
- 부분분수의 부호를 반대로 쓴다. 통분하여 확인하라.
- $0 < a < 2$와 $a > 2$를 정말로 다른 답으로 취급한다. 부호를 잘 따라가기만 하면 하나의 공식으로 두 경우를 모두 나타낼 수 있다.

STEP 너머

$a = 2$에서의 현상은 제거 가능한 특이점(removable singularity)의 작은 예이다. 어떤 점에서 정의되지 않는 것처럼 보이지만, 그 점에서의 극한이 정확히 적분값과 같은 공식이다. 해석학(analysis)에서는 매개변수(parameter)에 의존하는 적분이 언제 그 매개변수에 대하여 연속(또는 미분가능)인지를 배우는데, 이것이 두 경우가 일치해야만 했던 이유를 설명해 준다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 극한, 연속, 리만 적분(Riemann integral)을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.