풀이

STEP I 2003, 문제 5

순수수학 • 이항급수

> **STEP I 2003, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q5

핵심 아이디어

어떤 이항전개(binomial expansion)에서든 일반항(general term)을 적고, 그 항에 붙는 x의 거듭제곱을 추적한다. 상수항(constant term)은 그 지수가 0인 항이다. 소문항 (ii)에서는 전개가 유한하지 않으므로 먼저 지배적인 인수를 묶어 낸다. $|x|$가 클 때는 그것이 x^6이어서 $3/x$에 대한 급수(series)가 남고, $|x|$가 작을 때는 $3x^5$이어서 $x/3$에 대한 급수가 남는다. 그다음 x의 어떤 거듭제곱이 나타날 수 있는지를 보면 모든 것이 결정된다.

풀이

소문항 (i)

$(2x + x^{-2})^6$의 일반항은

$$\binom{6}{r}(2x)^{6-r}(x^{-2})^r = \binom{6}{r}2^{6-r}x^{6-3r}, \qquad r = 0, 1, \ldots, 6.$$

이 항이 x와 무관할 필요충분조건은 $6 - 3r = 0$, 즉 $r = 2$이고, 이때 그 항은

$$\binom{6}{2}2^4 = 15 \times 16 = 240,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

같은 방법으로 $(ax^3 + bx^{-2})^{5n}$의 일반항은

$$\binom{5n}{r}(ax^3)^{5n-r}(bx^{-2})^r = \binom{5n}{r}a^{5n-r}b^r\, x^{15n-5r}.$$

x의 지수는 $15n = 5r$일 때 0이므로 $r = 3n$이다(이 값은 $0 \le r \le 5n$ 안에 있다). 따라서 x와

무관한 항은

$$\binom{5n}{3n} a^{2n} b^{3n} = \frac{(5n)!}{(2n)!\,(3n)!}\, a^{2n} b^{3n}.$$

소문항 (ii)

$|x|$가 클 때. 인수 x^6을 묶어 내면

$$f(x) = (x^6(1+3/x))^{1/2} = x^3\Big(1+\frac{3}{x}\Big)^{1/2},$$

이다. 여기서 문제의 의도대로 $(x^6)^{1/2} = x^3$으로 둔다(엄밀히는 $|x|^3$이다. 아래의 설명을 보라). $|x| > 3$이면 $|3/x| < 1$이므로, $u = 3/x$로 둔 $(1+u)^{1/2}$의 이항급수(binomial series)는 수렴(converges)한다.

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 + \tfrac{1}{16}u^3 - \tfrac{5}{128}u^4 + \cdots,$$

여기서 u^3의 계수는

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{3!} = \frac{3/8}{6} = \frac{1}{16}.$$

급수에 x^3을 곱하면 항 $\binom{1/2}{k}3^k x^{-k}$는 $\binom{1/2}{k}3^k x^{3-k}$가 되므로, 상수를 주는 것은 $k = 3$뿐이다.

$$f(x) = x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{9}{8}x + \frac{1}{16}\cdot 27 - \frac{405}{128x} + \cdots,$$

따라서 x와 무관한 항은 $\frac{27}{16}$이고, 원하는 결과를 얻는다.

? **생각해 보기** $x < -3$이면 어떻게 되는가?

제곱근은 음이 아닌 근을 뜻하며, $(x^6)^{1/2} = |x|^3$이고 이는 $x < 0$일 때 $-x^3$과 같다. 따라서 $x < -3$이면 전개의 모든 항의 부호가 바뀌고, 상수항은 $-\frac{27}{16}$이 된다. 주어진 결과 $\frac{27}{16}$은 $x > 3$일 때 정확히 맞고, $x < -3$일 때는 $(x^6)^{1/2}$를 x^3으로 읽으면 성립하는데, 이것이 분명히 문제의 의도이다.

$|x|$가 작을 때. 이제 괄호 안에서 지배적인 항은 $3x^5$이므로 대신 그것을 묶어 낸다.

$$x^6 + 3x^5 = 3x^5\Big(1+\frac{x}{3}\Big).$$

$f(x)$가 실수이려면 $x^5(x+3) \geq 0$이어야 한다. $|x| < 3$이면 인수 $x+3$은 양수이므로 $x \geq 0$이어야 한다. ($-3 < x < 0$에서는 f가 실함수로서 아예 정의되지 않는다.) $0 < x < 3$일 때

$$f(x) = \sqrt{3}\,x^{5/2}\Big(1+\frac{x}{3}\Big)^{1/2} = \sqrt{3}\,x^{5/2}\sum_{k\geq 0}\binom{1/2}{k}\frac{x^k}{3^k},$$

이고, $|x/3| < 1$이므로 이 급수는 수렴한다. 모든 항은

$$x^{5/2+k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

의 상수배이고, $\frac{5}{2}+k$는 결코 정수가 아니므로 특히 0이 될 수 없다. 따라서 $|x|<3$에서 $f(x)$를 x의 거듭제곱으로 전개한 식에는 x와 무관한 항이 없다. ($x=0$ 자체에서는 $f(0)=0$이다.)

검산

- 큰 양수 x에 대해 $f(x)-\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{8}x\right)$는 $\frac{27}{16}=1.6875$에 가까워져야 한다. $x=1000$에서 계산기로 구하면 1.68434이고, 급수의 다음 항 $-\frac{405}{128x}\approx -0.00316$이 그 차이를 설명한다.
- 0 근처에서 $f(x)\approx\sqrt{3}\,x^{5/2}$이다. $x=0.01$에서 $f(0.01)=\sqrt{10^{-12}+3\times10^{-10}}\approx 1.734\times10^{-5}$으로 $\sqrt{3}\times10^{-5}$에 가깝고, 0이 아닌 상수로 다가가지 않는 것은 분명하다.
- 일반 공식에서 $n=1$, $a=b=1$로 두면 $\binom{5}{3}=10$을 얻는데, 이는 $(x^3+x^{-2})^5$의 상수항이다. 직접 전개해 보면 확인된다.

흔한 실수

- 일반항의 지수를 반대로 적어서, 예를 들어 $(2x)^r(x^{-2})^{6-r}$으로 쓰고 나서 r과 이항계수(binomial coefficient)를 엇갈리게 맞추는 것. 일관되게만 쓴다면 어느 쪽으로 번호를 붙여도 된다.
- $\binom{1/2}{3}$의 부호를 틀리는 것. 두 음수 인수 $(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})$ 때문에 양수가 된다.
- 작은 x에 대해 $(x^6+3x^5)^{1/2}$를 x^6을 묶어 내어 전개하는 것. 그러면 $3/x$에 대한 급수가 나오는데, 이는 $|x|<3$일 때 발산(diverges)한다.

STEP 너머

f의 두 전개는 서로 다른 영역에서 유효하며, 어떤 인수를 묶어 내느냐가 어느 영역을 얻는지를 결정한다. 이것은 함수를 서로 다른 점을 중심으로 전개한다는 아이디어이며, 복소해석학(complex analysis)에서 로랑 급수(Laurent series)와 퓌죄 급수(Puiseux series, 여기의 $x^{5/2+k}$처럼 분수 지수의 거듭제곱으로 전개한 것)로 이어진다. $x<-3$에서 부호 문제를 일으킨 제곱근의 분지(branch) 역시 그 분야의 중심 주제이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 두 가지를 모두 그림으로 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.