풀이

STEP I 2003, 문제 4

순수수학 • 삼각부등식(삼각함수)

> **STEP I 2003, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q4

핵심 아이디어

양변에 $\cos\theta$를 곱하고 싶어지지만, $\cos\theta$는 $[0, 2\pi)$에서 부호가 바뀌고, 음수를 곱하면 부등식(inequality)의 방향이 뒤집힌다. 그래서 $\cos\theta > 0$인 경우와 $\cos\theta < 0$인 경우로 나눈다. $1 + \sin\theta$는 절대 음수가 아니므로 한 경우는 자명하다. 다른 경우는 $\sin\theta - \cos\theta$를 $R\sin(\theta - \alpha)$ 꼴로 나타내면 사인에 관한 부등식 하나로 정리된다.

풀이

$f(\theta) = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$라 하자. 이 풀이 전체에서 $0 \le \theta < 2\pi$이고 $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$이다.

경우 1: $\cos\theta < 0$, **즉** $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\sin\theta \ge -1$이므로 분자(numerator) $1+\sin\theta$는 0 이상이고, 분모(denominator)는 음수이다. 따라서 $f(\theta) \le 0 < 1$이다.

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$에 속하는 **모든** θ가 부등식을 만족한다.

경우 2: $\cos\theta > 0$, **즉** $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ **또는** $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

양수 $\cos\theta$를 곱하면 부등식의 방향이 유지되므로

$$f(\theta) \le 1 \iff 1+\sin\theta \le \cos\theta \iff \sin\theta - \cos\theta \le -1.$$

이제 $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$이므로, 조건은 다음과 같이 된다.

$$\sin\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right) \le -\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

? **생각해 보기** $\phi = \theta - \frac{\pi}{4}$의 어떤 값들을 살펴보아야 하는가?

이 경우에 허용되는 두 범위만 보면 된다.

- $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$이면 $-\frac{\pi}{4} \le \phi < \frac{\pi}{4}$이다. 이 구간에서 $\sin\phi$는 증가하고 $\sin\phi \ge \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$이며, 등호는 $\phi = -\frac{\pi}{4}$일 때만 성립한다. 따라서 여기서의 해는 $\theta = 0$뿐이다. (확인: $f(0) = 1/1 = 1$이므로 등호가 성립한다.)
- $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$이면 $\frac{5\pi}{4} < \phi < \frac{7\pi}{4}$이다. $\sin\phi$는 양 끝에서 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$이고 그 사이 $\phi = \frac{3\pi}{2}$에서 -1까지 내려가므로, 이 열린구간에서 $\sin\phi < -\frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 따라서 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$에 속하는 모든 θ가 해이다.

종합하기

$\theta = \frac{3\pi}{2}$에서는 $\cos\theta = 0$이므로 이 값은 제외된다. 두 경우를 합치면, 부등식이 성립할 필요충분조건은 다음과 같다.

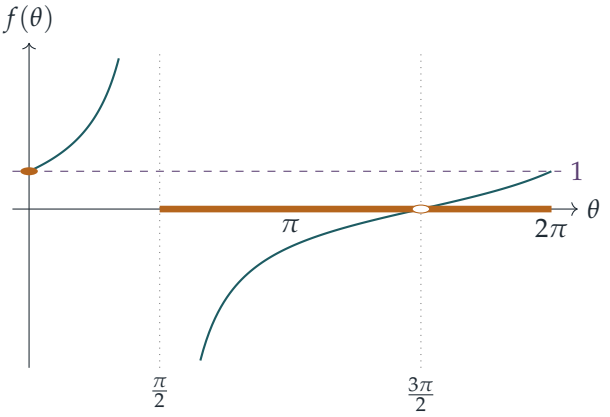
$$\theta = 0 \qquad \text{또는} \qquad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \qquad \text{또는} \qquad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi.$$

더 매끄러운 관점

$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, $\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$, $1 = \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}$를 이용하면

$$f(\theta) = \frac{\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1 + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\frac{\theta}{2}} = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

이다. 여기서 공통인수를 약분했는데, $\cos\theta \neq 0$이므로 이 인수는 0이 아니다. ($\theta = \pi$에서는 가운데 식이 정의되지 않지만, 처음 식과 마지막 식은 그곳에서도 같다.) θ가 $[0, 2\pi)$를 움직이면 $\psi = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$는 $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$를 움직인다. $\tan\psi$의 그래프를 보면 $\tan\psi \le 1$인 것은 $\psi = \frac{\pi}{4}$일 때와 $\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{5\pi}{4}$일 때뿐임을 곧바로 알 수 있다. $\psi = \pi$ (즉 $\theta = \frac{3\pi}{2}$)를 제외하면 앞의 답과 같다.



해집합(호박색)은 곡선이 점선 $f = 1$ 위에 있거나 그 아래에 있는 부분이다. $\theta = \frac{3\pi}{2}$에 구멍이 있다는 점에 주목하자. 그곳에서 $f(\theta) \to 0$이지만 f는 정의되지 않는다.

검산

- $\theta = 0$: $f(0) = 1$로 경계 위에 있다. 0보다 조금 큰 곳에서는 분자가 1보다 크고 분모는 1보다 작으므로 $f > 1$이다. 이로써 $\theta = 0$이 고립된 해(isolated solution)임을 확인할 수 있다.
- $\theta = \frac{7\pi}{4}$: $f = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) / \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414 \leq 1$. 맞다.
- $\theta = \pi$: $f = 1/(-1) = -1 \leq 1$. 맞다.
- $[0, 2\pi)$에서 무작위로 고른 θ 2×10^5개를 시험해 본 결과, 위에서 구한 해집합과 완전히 일치했다. $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 근처에서는 $f \approx 5 \times 10^{-5}$였는데, 이는 $f \to 0$과 들어맞는다.

흔한 실수

- 경우를 나누지 않고 $\cos\theta$를 양변에 곱하는 것. 그러면 모든 곳에서 $1 + \sin\theta \leq \cos\theta$를 얻게 되어, 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 전체를 잘못 버리게 된다.
- 고립된 해 $\theta = 0$을 빠뜨리는 것. 문제에서 $\theta = 0$을 허용하고, 등호도 포함된다.
- $\theta = \frac{3\pi}{2}$를 포함하는 것. 그곳에서 식은 $\frac{0}{0}$이므로, 극한(limit)이 0이더라도 정의되지 않는다.

STEP 너머

여기서 얻는 교훈은 부등식이 **증가하는** 연산, 즉 양수를 곱하거나 증가함수(increasing function)를 적용하는 것 등에 의해서만 보존된다는 것이다. 이를 꼼꼼히 따지는 것이 실해석학(real analysis)의 일상적인 작업이다. f가 극한은 갖지만 값은 갖지 않는 $\theta = \frac{3\pi}{2}$에서의 제거 가능한 특이점(removable singularity) 역시 실해석학의 또 다른 주제이다. 연속성(continuity)이란 극한과 함숫값이 일치하는 것에 관한 개념이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 이 두 아이디어를 꼼꼼하면서도 읽기 쉽게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.