풀이

STEP I 2003, 문제 3

순수수학 • 반각 삼각방정식

> **STEP I 2003, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q3

핵심 아이디어

각 소문항은 $\frac{1}{2}\theta$에 대한 함수와 θ에 대한 같은 함수를 비교하므로, 배각 공식(double-angle formula)을 이용해 모든 것을 반각(half-angle)으로 나타낸다. 그러면 각 방정식은 하나의 양($\sin\frac{1}{2}\theta$, $\tan\frac{1}{2}\theta$ 또는 $\cos\frac{1}{2}\theta$)에 대한 다항방정식(polynomial equation)이 되고, 이것은 인수분해(factorise)하거나 이차방정식(quadratic equation)으로 풀 수 있다. 주의할 점은 반각 함수가 실제로 가질 수 있는 값이 무엇인지, 그리고 함수가 어디에서 정의되는지를 놓치지 않는 것뿐이다.

풀이

소문항 (i)

$\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$를 이용하면 방정식 $2\sin\frac{1}{2}\theta = \sin\theta$는 다음과 동치(equivalent)이다.

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta = 0, \qquad \text{즉,} \qquad 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,(1-\cos\tfrac{1}{2}\theta) = 0.$$

따라서 방정식이 성립할 필요충분조건은 $\sin\frac{1}{2}\theta = 0$ 또는 $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$이다.

그런데 $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$이면 $\sin^2\frac{1}{2}\theta = 1 - \cos^2\frac{1}{2}\theta = 0$이므로 어차피 $\sin\frac{1}{2}\theta = 0$이다. 따라서 두 번째 경우는 첫 번째 경우에 포함되고,

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta = \sin\theta \iff \sin\tfrac{1}{2}\theta = 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (다시 말해, 해는 정확히 정수 n에 대하여 $\theta = 2n\pi$이다.)

소문항 (ii)

$t = \tan\frac{1}{2}\theta$라 하자. 방정식이 의미를 가지려면 $\tan\frac{1}{2}\theta$와 $\tan\theta$가 모두 정의되어야 하므로 $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$이고 $\cos\theta \neq 0$이어야 한다. $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$이므로 두 번째 조건은 $t^2 \neq 1$을 뜻한다. 이 제한 아래에서 $\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$이고, 방정식은 다음과 같이 된다.

$$2t = \frac{2t}{1-t^2}.$$

0이 아닌 $1-t^2$를 양변에 곱하면 $2t - 2t^3 = 2t$이므로 $t^3 = 0$이고 $t = 0$이다.

> **생각해 보기** $1-t^2$를 양변에 곱해도 괜찮은가? 그 과정에서 해를 잃거나 새로 얻지는 않았는가?

0이 아닌 양을 곱하는 것은 되돌릴 수 있는 연산이므로, 두 탄젠트가 모두 정의되는 집합 위에서 t에 대한 방정식은 $t = 0$과 정확히 동치이다. 역으로 $t = 0$이면 $\tan\theta = 0$이고 $\tan\frac{1}{2}\theta = 0$이어서 양변이 모두 0이다.

이제 $\tan\frac{1}{2}\theta = 0$인 것은 정확히 $\frac{1}{2}\theta = n\pi$일 때이다. 따라서 해는

$$\theta = 2n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

이고, 이는 소문항 (i)과 같은 집합이다.

소문항 (iii)

$c = \cos\frac{1}{2}\theta$라 하자. $\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta - 1 = 2c^2 - 1$을 이용하면 방정식 $2\cos\frac{1}{2}\theta = \cos\theta$는 다음과 동치이다.

$$2c = 2c^2 - 1 \iff 2c^2 - 2c - 1 = 0 \iff c = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

c는 코사인 값이므로 $-1 \le c \le 1$이다. 근 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \approx 1.37$은 너무 크고, $\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \approx -0.37$은 가능하다. 따라서 방정식이 성립할 필요충분조건은

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}) = -\cos\phi,$$

이다. 여기서 ϕ는 문제에서 정의한 것이다. $0 < \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) < 1$이고 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 cos는 1에서 0으로 감소하므로, 이러한 ϕ는 존재하며 유일하다.

> **생각해 보기** $\cos\frac{1}{2}\theta = -\cos\phi$를 어떻게 주어진 꼴로 바꿀 수 있을까?

$-\cos\phi = \cos(\pi - \phi)$로 쓴다. $\cos x = \cos\alpha$의 일반해(general solution)는 $x = 2m\pi \pm \alpha$이므로

$$\tfrac{1}{2}\theta = 2m\pi \pm (\pi - \phi) \qquad \text{즉,} \qquad \theta = 4m\pi \pm (2\pi - 2\phi), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

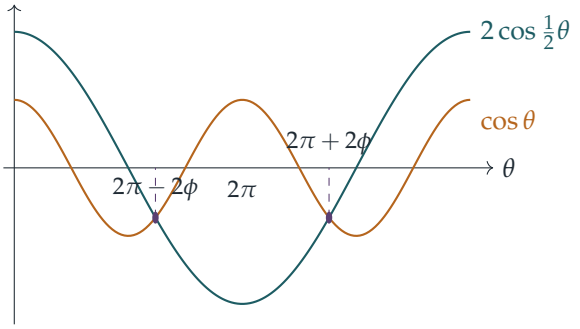
두 부호를 따로 살펴보자.

- $+$ 부호일 때: $n = m$으로 두면 $\theta = 4m\pi + 2\pi - 2\phi = (4n+2)\pi - 2\phi$이다.
- $-$ 부호일 때: $n = m-1$로 두면 $\theta = 4m\pi - 2\pi + 2\phi = \big(4(m-1)+2\big)\pi + 2\phi = (4n+2)\pi + 2\phi$이다.

m이 모든 정수를 지나면 각 경우에서 n도 모든 정수를 지난다. 따라서

$$2\cos\tfrac{1}{2}\theta = \cos\theta \iff \theta = (4n+2)\pi \pm 2\phi, \text{ 어떤 정수} n.$$

모든 단계가 동치였으므로 양방향이 모두 증명된다. 역을 직접 확인해 보면, $\theta = (4n+2)\pi \pm 2\phi$일 때 $\cos\tfrac{1}{2}\theta = \cos\big((2n+1)\pi \pm \phi\big) = -\cos\phi = c$이고, 이는 $2c = 2c^2 - 1$을 만족한다.



$2\cos\tfrac{1}{2}\theta$의 한 주기(period) $0 \le \theta \le 4\pi$에서 두 곡선은 두 번 만나며, 그 두 점은 $2\cos\tfrac{1}{2}\theta$가 최솟값 -2에 이르는 $\theta = 2\pi$에 대하여 대칭이다.

검산

- 수치적으로 $\cos\phi \approx 0.3660$이면 $\phi \approx 1.1961$이므로, (iii)의 첫 번째 양의 해는 $2\pi - 2\phi \approx 3.8911$이다. 이 점에서 $2\cos\tfrac{1}{2}\theta \approx -0.7321$이고 $\cos\theta \approx -0.7321$이므로 조건을 만족한다. $[-6\pi, 6\pi]$에서 $2\cos\tfrac{1}{2}\theta - \cos\theta$의 근을 탐색하면 이 범위에 있는 $(4n+2)\pi \pm 2\phi$ 꼴의 값 여섯 개만 정확히 나온다.
- (ii)에 대해서도 극(pole)을 피해 비슷하게 탐색하면 2π의 배수에서만 근이 나온다.
- (i)과 (ii)의 타당성 확인: $\theta = \pi$는 $2\sin\tfrac{1}{2}\pi = 2 \neq 0 = \sin\pi$이므로 (i)을 만족하지 않고, (ii)에서는 $\tan\tfrac{1}{2}\pi$가 정의되지 않으므로 정의역(domain) 밖에 있다.

흔한 실수

- (i)에서 $\sin\frac{1}{2}\theta$가 0일 수 있다는 언급 없이 약분하거나, $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$이 이미 포함되어 있다는 것을 알아차리지 못하고 별도의 해의 족으로 제시하는 것.
- (ii)에서 분모를 없애기 전에 θ가 $\tan\theta$ 또는 $\tan\frac{1}{2}\theta$가 정의되지 않는 점을 피해야 한다는 것을 잊는 것.
- (iii)에서 1보다 큰 근 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$을 버리지 않거나, $4m\pi \pm (2\pi - 2\phi)$를 $(4n+2)\pi \pm 2\phi$ 꼴로 바꿀 때 $\pm$를 잘못 다루는 것.

STEP 너머

각 소문항은 반각에 대한 하나의 함수로 치환하여 방정식을 푸는데, 이 치환은 삼각방정식을 대수방정식으로 바꾼다. 특히 (ii)의 치환 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$는 매우 강력하다. 이 치환은 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$를 t의 유리함수(rational function)로 나타내며, 이 때문에 대학 1학년 미적분학에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 임의의 유리함수를 적분하는 데 쓰인다. 기하학적으로는 단위원(unit circle)을 유리점으로 매개화(parametrise)한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에 이러한 아이디어를 다루는 STEP 스타일의 연습 문제가 더 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.