풀이

STEP I 2003, 문제 2

순수수학 • 대수적 항등식

> **STEP I 2003, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q2

핵심 아이디어

수험생의 답은 그것이 방정식을 만족할 때 정확히 옳다. 따라서 그 답을 대입하고 분모를 없애 보자. 그러면 각 문항은 주어진 수들에 대한 다항식 조건으로 바뀐다. 첫 번째 문항에서 그 조건은 0이 아닌 실수에 대해서는 결코 0이 될 수 없는 이차 형식(quadratic form)이다. 두 번째 문항에서는 아름답게 인수분해(factorise)되는 삼차식이 나오는데, 그 인수들이 바로 문제에서 묻는 세 방정식이다.

풀이

첫 번째 문항

이 풀이 전체에서 a와 b는 0이 아닌 실수이다. 수험생의 답은 $x = a + b$가 방정식을 만족할 때 정확히 옳다. 우선 이것이 의미를 가지려면 $a + b \neq 0$이어야 하고, 그다음

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}.$$

이어야 한다. 0이 아닌 $ab(a+b)$를 양변에 곱하면, 이는 다음과 동치이다.

$$ab = (a+b)^2, \qquad \text{즉,} \qquad a^2 + ab + b^2 = 0.$$

완전제곱식으로 고치면(completing the square)

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \tfrac{1}{2}b\right)^2 + \tfrac{3}{4}b^2.$$

두 항 모두 실수의 제곱이므로 둘 다 ≥ 0이고, $b \neq 0$이므로 두 번째 항은 순양수이다. 따라서 모든 실수 a와 0이 아닌 실수 b에 대해 $a^2 + ab + b^2 > 0$이므로, 이 조건은 결코 성립할 수 없다.

($a+b=0$이면 수험생의 "답" $x=0$은 방정식에서 아예 의미를 갖지 않으므로, 이 경우도 나을 것이 없다.) 그러므로 $x=a+b$가 옳은 답이 되는 a와 b의 값은 존재하지 않으며, 이것으로 증명이 끝난다.

두 번째 문항

이제 a, b, c는 0이 아닌 수이다. 답 $x=a+b+c$가 옳을 필요충분조건(if and only if)은 $a+b+c\neq 0$이고

$$\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}.$$

인 것이다. 양변에 $abc(a+b+c)\neq 0$을 곱하면, 이는 다음과 동치이다.

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0. \qquad (*)$$

? **생각해 보기** $(*)$의 좌변이 인수분해된다는 것을 어떻게 알아챌 수 있을까?

증명해야 할 결과를 보면 $a+b$, $b+c$, $c+a$가 인수일 것이라고 예상할 수 있다. 하나를 확인해 보자. $b=-a$를 대입하면 $a+b+c=c$이고 $ab+bc+ca=-a^2-ac+ca=-a^2$이므로, 좌변은 $c(-a^2)-(-a^2c)=0$이 된다. 따라서 $a+b$는 인수이고, 대칭성에 의해 $b+c$와 $c+a$도 인수이다. 좌변의 차수(degree)는 3이므로 좌변은 $(a+b)(b+c)(c+a)$의 상수배이다. a^2b의 계수(coefficient)를 비교하면(양변 모두 1이다) 그 상수는 1이다. 또는 양변을 모두 전개해도 된다.

$$\begin{aligned}(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc &= a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+3abc-abc\\ &= a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc\\ &= (a+b)(b+c)(c+a).\end{aligned}$$

따라서 $(*)$는 다음과 같다.

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

이제 두 방향을 모두 증명한다.

답이 옳다면. 이때 $a+b+c\neq 0$이고 $(*)$가 성립하므로 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$이다. 여러 수의 곱이 0이 되는 것은 인수 중 하나가 0일 때뿐이므로, $a+b=0$, $b+c=0$, $c+a=0$ 중 적어도 하나가 성립한다.

역(*converse*)으로, 이 중 적어도 하나가 성립한다고 하자. 대칭성에 의해 $a+b=0$이라고 해도 된다. 그러면 $a+b+c=c\neq 0$이므로 수험생의 답은 0이 아닌 정당한 수이고, $(*)$의 인수분해된 꼴이 성립한다. 방정식에서 $(*)$로 가는 과정은 거꾸로 되돌릴 수 있으므로(0이 아닌 수 $abc(a+b+c)$를 곱하기만 했다), $x=a+b+c$는 방정식을 만족한다. 이는 직접 확인할 수도 있다. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=0$이므로 방정식은 $\frac{1}{x}=\frac{1}{c}$가 되고, 그 해는 $x=c=a+b+c$이다.

따라서 수험생의 답이 옳을 필요충분조건은 $a+b=0, b+c=0, c+a=0$ 중 적어도 하나가 성립하는 것이다. ■

이 논증에서 a, b, c가 실수라는 사실은 한 번도 쓰지 않았다는 점에 주목하자. 인수분해는 대수적 항등식(identity)이므로, 이 결과는 0이 아닌 복소수(complex number)에 대해서도 성립한다. 반면 첫 번째 문항에서는 a와 b가 실수라는 조건이 정말로 필요하다. 복소수 범위에서는 $a^2+ab+b^2=0$이 $b=a\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$와 같은 해를 갖기 때문이다.

검산

- $a=2, b=-2, c=5$로 두면 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$이고 $a+b+c=5$이므로 수험생의 답이 옳다.
- $a=b=c=1$로 두면 참인 답은 $x=\frac{1}{3}$이지만 수험생은 3이라고 답한다. 실제로 $(a+b)(b+c)(c+a)=8\neq 0$이다.
- $a=1, b=2, c=3$에서 $(a+b)(b+c)(c+a)$를 계산하면 $3\cdot 5\cdot 4=60$이고, $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=6\cdot 11-6=60$이다.
- $|n|\leq 6$이고 $d\in\{1,2,3\}$인 0이 아닌 유리수 n/d로 이루어진 17 576개의 순서쌍 전체에 대해, 정확한 분수 계산으로 두 방향을 빠짐없이 검사했으며 예외는 없었다.

흔한 실수

- $a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab$라고 쓰고 멈추는 것. 이것으로는 양수임이 보이지 않는다. 완전제곱식으로 고쳐야 보인다.
- 두 번째 문항에서 한 방향만 증명하는 것. "필요충분조건"을 보이려면 두 방향이 모두 필요하고, 역을 보일 때는 $a+b+c\neq 0$임을 확인해야 한다.
- 양변에 곱하기 전에 $abc(a+b+c)$가 0이 아니어야 한다는 점을 잊는 것. 바로 이 점 때문에 과정을 거꾸로 되돌릴 수 있다.

STEP 너머

식 $(a+b)(b+c)(c+a)$는 대칭다항식(symmetric polynomial)이다. 그리고 $e_1=a+b+c$, $e_2=ab+bc+ca$, $e_3=abc$일 때의 항등식 $(a+b)(b+c)(c+a)=e_1e_2-e_3$은 대칭다항식의 기본 정리(fundamental theorem of symmetric polynomials)의 한 예이다. 이 정리에 따르면 모든 대칭다항식은 이 기본 대칭다항식(elementary symmetric polynomial)들의 다항식으로 나타낼 수 있다. 이 e_1, e_2, e_3는 부호를 무시하면 a, b, c를 근으로 갖는 삼차식의

계수이며, 그래서 방정식 이론 곳곳에 등장한다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 관점에서 다항식환(polynomial ring)을 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 인수분해를 알아채는 STEP 연습 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.