풀이

STEP I 2003, 문제 11

역학 • 경사면 위에서의 충돌

> **STEP I 2003, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q11

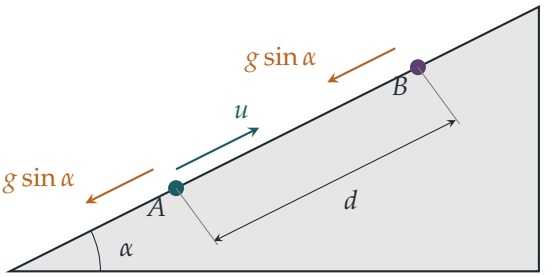
핵심 아이디어

매끄러운 경사면 위에서는 모든 입자가 속도와 관계없이 최대 경사선을 따라 아래쪽으로 같은 가속도 $g\sin\alpha$를 가진다. 따라서 중력은 두 입자의 **상대** 운동(relative motion)을 바꿀 수 없다. 한 입자에서 보면 다른 입자는 등속도로 움직인다. 이 덕분에 충돌 시각을 쉽게 구할 수 있고, 번거로운 운동학 계산 없이도 충돌 순간의 상대 속도를 알 수 있다. 충돌에서 잃는 에너지는 그 상대 속도에만 의존하며, 그래서 답에서 α, g, d가 모두 사라진다.

풀이

모형

두 입자를 A와 B를 지나는 최대 경사선(line of greatest slope)을 따라 움직이는 질점(point mass)으로 다룬다. 평면이 매끄러우므로 각 입자에 작용하는 힘은 무게와 수직항력(normal reaction)뿐이다. 평면에 수직인 방향으로 힘을 분해하면 수직항력은 $mg\cos\alpha$와 평형을 이룬다. 평면을 따라 힘을 분해하면 각 입자는 경사면 아래쪽으로 가속도 $g\sin\alpha$를 가진다. x를 A에서부터 경사면 위쪽으로 잰 거리로 잡는다.



충돌 시각

$a = g\sin\alpha$라 하자. 경사면 위쪽을 양의 방향으로 잡으면, A에서 출발한 입자(P라 하자)와 B에서 출발한 입자(Q라 하자)의 위치는

$$x_P = ut - \tfrac{1}{2}at^2,$$
$$x_Q = d - \tfrac{1}{2}at^2.$$

이다. 두 입자 사이의 간격은

$$x_Q - x_P = d - ut,$$

인데, $\frac{1}{2}at^2$ 항이 소거되기 때문이다. 간격은 d에서부터 일정하게 줄어들며, 정확히

$$t = \frac{d}{u},$$

일 때 0이 된다. 이것이 보여야 할 내용이다. 이 소거가 바로 핵심 아이디어가 작동하는 모습이다. 두 입자가 경사면 아래로 똑같은 방식으로 떨어지므로, 처음의 상대 속력 u만이 중요하다.

운동 에너지의 손실

$t = d/u$일 때 경사면 위쪽 방향의 속도는

$$v_P = u - \frac{ad}{u}, \qquad v_Q = -\frac{ad}{u}.$$

이다. 간단히 $w = ad/u$로 쓰자. 그러면 $v_P = u - w$, $v_Q = -w$이고, P는 상대 속력 $v_P - v_Q = u$로 Q에 다가간다.

> **생각해 보기** 중력이 작용하고 있는데 왜 운동량 보존(conservation of momentum)을 쓸 수 있는가?

충돌은 순간적으로 일어난다. 아주 짧은 충돌 시간 동안 중력과 수직항력 같은 유한한 힘이 만드는 충격량(impulse)은 두 입자 사이의 큰 충격량에 비하면 무시할 수 있을 만큼 작다. 따라서 충돌에서 경사면 방향의 운동량은 보존된다.

충돌 후 경사면 위쪽 방향의 속도를 v'_P, v'_Q이라 하자. 두 질량이 같으므로 운동량 보존에 의해

$$v'_P + v'_Q = v_P + v_Q = u - 2w. \tag{1}$$

이다. 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)에 따르면 분리 속력은 접근 속력의 e배이다.

$$v'_Q - v'_P = e(v_P - v_Q) = eu. \tag{2}$$

v'_P과 v'_Q을 각각 구하는 대신 항등식

$$p^2 + q^2 = \tfrac{1}{2}[(p+q)^2 + (p-q)^2].$$

을 이용한다. 이를 충돌 전과 후에 적용하면 전체 운동 에너지는

$$\text{충돌 전 운동 에너지} = \tfrac{1}{2}m(v_P^2 + v_Q^2) = \tfrac{1}{4}m[(u-2w)^2 + u^2],$$
$$\text{충돌 후 운동 에너지} = \tfrac{1}{2}m(v_P'^2 + v_Q'^2) = \tfrac{1}{4}m[(u-2w)^2 + e^2u^2],$$

이다. 여기서 충돌 후의 합과 차에는 (1)과 (2)를 사용했다. 합에 해당하는 항은 두 식에서 같으므로

$$\text{운동 에너지 손실} = \tfrac{1}{4}mu^2 - \tfrac{1}{4}me^2u^2 = \tfrac{1}{4}mu^2(1-e^2),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

? **생각해 보기** $(u-2w)^2$ 항은 물리적으로 무엇이며, 왜 변하지 않는가?

$v_P + v_Q$의 절반은 질량중심(centre of mass)의 속도이다. 항 $\frac{1}{4}m(u-2w)^2$은 전체 질량 $2m$이 그 속도로 움직일 때의 운동 에너지이며, 운동량 보존이 이 값을 고정시킨다. 잃을 수 있는 것은 질량중심에 **상대적인** 운동의 운동 에너지뿐이고, 이는 상대 속력, 즉 충돌 전의 u와 충돌 후의 eu에만 의존한다.

검산

- $e = 1$(완전 탄성 충돌)이면 손실은 0이며, 당연히 그래야 한다. $e = 0$이면 두 입자는 충돌 후 함께 움직이고 손실은 상대 운동의 운동 에너지 전부인 $\frac{1}{4}mu^2$이다.
- $\alpha = 0$이면 평면은 수평이고 Q는 정지해 있으며, P는 시간 d/u 후에 속력 u로 Q에 도달하므로 결과와 일치한다.
- 수치로 확인해 보자. $\alpha = 30°$, $g = 9.8$, $d = 2$, $u = 4$, $e = \frac{1}{2}$, $m = 1$이면 $t = 0.5$에서 두 속도는 1.55와 -2.45이다. 충돌 후에는 -1.45와 0.55가 되고, 운동 에너지는 4.2025에서 1.2025로 줄어 손실은 3이며, 이는 $\frac{1}{4} \cdot 16 \cdot \frac{3}{4}$과 같다. 운동을 수치적으로 단계별 계산한 1000개의 무작위 사례 검사에서도 결과가 일치했다.

흔한 실수

- 충돌 순간 Q의 속도를 0으로 놓는 실수. P가 감속하는 동안 Q도 시간 d/u 동안 경사면 아래로 미끄러져 왔다.
- 뉴턴의 법칙에서 부호를 틀리는 실수. 두 속도를 모두 같은 양의 방향으로 쓴 다음, 분리 속력 $= e \times$ 접근 속력으로 놓는다.

- v'_P과 v'_Q을 끝까지 구한 뒤 네 개의 제곱을 전개하는 것. 이 방법도 되지만, 합과 차의 항등식을 쓰면 대수 계산을 거의 다 피할 수 있다.

STEP 너머

두 부분 모두 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)로 바꾸는 예이다. 균일한 중력장은 모든 입자에 같은 가속도를 주므로 상대 운동에서는 완전히 사라진다. 또한 어떤 계의 운동 에너지든 질량중심의 운동 에너지와 질량중심에 상대적인 운동 에너지의 합으로 나뉜다(쾨니히 정리(König's theorem)). 이체 문제(two-body problem)에서 두 번째 부분은 환산 질량(reduced mass) $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$를 써서 $\frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2$이며, 여기서는 $\frac{1}{2}m$이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 두 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.