풀이

STEP I 2003, 문제 10

역학 • 얇은 판의 질량중심

> **STEP I 2003, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q10

핵심 아이디어

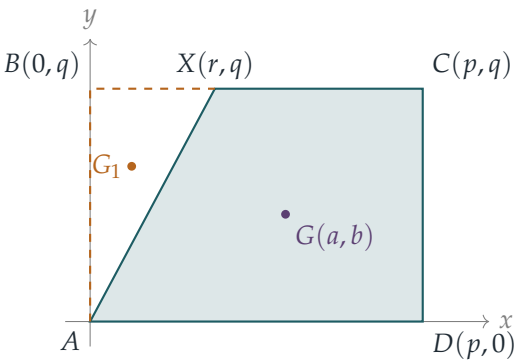
한 조각이 잘려 나간 도형은 **빼기**로 다루는 것이 가장 좋다. 각 축에 대한 직사각형의 모멘트(moment)는 사다리꼴(trapezium)의 모멘트와 삼각형의 모멘트의 합과 같고, 이때 질량은 넓이에 비례한다. 매다는 상황에서는, 한 점에 자유롭게 매달린 박판(lamina)이 그 점의 바로 아래에 무게중심(centre of gravity)이 오도록 정지하므로, 선분 AG는 연직이다. 그러면 45° 조건은 a와 b 사이의 매우 간단한 관계로 바뀐다.

풀이

박판이 균일하고 얇다고 모형화하므로, 각 조각의 질량은 그 넓이에 비례하고 삼각형의 무게중심은 그 도심(centroid, 세 꼭짓점의 평균)에 있다.

무게중심

주어진 좌표축에서 $A = (0,0)$, $D = (p,0)$, $C = (p,q)$이므로 $B = (0,q)$이다. X는 BC 위에 있고 $BX = r$이므로 $X = (r,q)$이며, 여기서 $0 \le r \le p$이다.



세 조각은 다음과 같다.

- 직사각형 $ABCD$: 넓이 pq, 무게중심 $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$.
- 잘려 나간 삼각형 ABX: 넓이 $\frac{1}{2}qr$, 무게중심 G_1은 $(0,0)$, $(0,q)$, (r,q)의 평균인 $(\frac{r}{3}, \frac{2q}{3})$.
- 남은 사다리꼴 $AXCD$: 넓이 $pq - \frac{1}{2}qr = \frac{1}{2}q(2p-r)$, 무게중심 $G = (a,b)$.

각 축에 대한 직사각형의 모멘트는 두 부분의 모멘트의 합이다. y축에 대한 모멘트를 취하면(즉 x좌표를 비교하면)

$$pq \cdot \frac{p}{2} = \frac{qr}{2} \cdot \frac{r}{3} + \frac{q(2p-r)}{2}\, a.$$

양변을 $\frac{q}{2}$로 나누면 $p^2 = \frac{r^2}{3} + (2p-r)a$이고, $2p - r \geq p > 0$이므로 이것으로 나눌 수 있다.

$$a = \frac{3p^2 - r^2}{3(2p-r)}.$$

마찬가지로 x축에 대해서는

$$pq \cdot \frac{q}{2} = \frac{qr}{2} \cdot \frac{2q}{3} + \frac{q(2p-r)}{2}\, b,$$

이므로 $pq = \frac{2qr}{3} + (2p-r)b$이고

$$b = \frac{q(3p-2r)}{3(2p-r)}.$$

간단히 확인해 보면, $r = 0$(아무것도 잘라 내지 않음)일 때 $a = \frac{p}{2}, b = \frac{q}{2}$로 직사각형의 중심이 나온다.

A에 매달기

박판이 A에 자유롭게 매달려 평형(equilibrium) 상태에 있을 때, 박판에 작용하는 힘은 G를 지나는 무게와 A에서의 반작용력, 이 두 가지뿐이다. 평형 상태에 있는 두 힘은 같은 직선 위에서 작용해야 하므로, G는 A의 연직 아래에 있다.

생각해 보기 "AD가 수평선 아래로 45°를 이룬다"는 조건은 어떻게 a와 b에 대한 방정식이 되는가?

AG가 연직이고 AD가 수평선과 45°를 이루므로, AD는 AG와도 45°를 이룬다. 즉 각 GAD는 45°이다. 우리의 좌표축에서 AD는 x축의 양의 방향이고 $G = (a, b)$이며 $a, b > 0$이므로(사다리꼴 내부에 있으므로) $\tan \angle GAD = b/a$이다. 따라서 $b/a = 1$, 즉

$$a = b.$$

위의 식을 대입하고 공통인 양의 분모 $3(2p - r)$를 약분하면

$$\begin{aligned} & 3p^2 - r^2 = q(3p - 2r) \\ \iff \quad & r^2 - 2qr + 3pq - 3p^2 = 0. \end{aligned}$$

근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$r = q \pm \sqrt{q^2 - (3pq - 3p^2)} = q \pm \sqrt{q^2 - 3pq + 3p^2}.$$

근호 안의 값은 $(q - \frac{3}{2}p)^2 + \frac{3}{4}p^2 > 0$이므로 두 근은 서로 다른 실근이다. $s = \sqrt{q^2 - 3pq + 3p^2} > 0$이라 하자.

부호 고르기. X는 길이가 p인 변 BC 위에 있으므로 $0 \le r \le p$이어야 한다. 근 $q + s$가 항상 p보다 큼을 보이자.

- $q \ge p$이면, $s > 0$이므로 $q + s > q \ge p$이다.
- $q < p$이면 $p - q > 0$이고

  $$s^2 - (p - q)^2 = (q^2 - 3pq + 3p^2) - (p^2 - 2pq + q^2) = 2p^2 - pq = p(2p - q) > 0,$$

  이다. $q < p < 2p$이기 때문이다. 따라서 $s > p - q$이고, 그러므로 $q + s > p$이다.

어느 경우든 양의 부호를 택하면 X가 C를 넘어 박판 밖에 놓이게 되므로 불가능하다. 따라서

$$r = q - \sqrt{q^2 - 3pq + 3p^2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

덧붙이자면, 이 근이 실제로 $[0, p]$에 속하는 것은 정확히 $p \le q \le 2p$일 때이다. 실제로 $q - s \ge 0 \iff q^2 \ge s^2 \iff 3p(q - p) \ge 0 \iff q \ge p$이고, ($q > p$일 때) $q - s \le p \iff (q - p)^2 \le s^2 \iff p(2p - q) \ge 0 \iff q \le 2p$이다. 따라서 문제에서 묘사한 상황은 이러한 도형에서만 일어날 수 있으며, 이는 직관과도 맞는다. 자르지 않은 정사각형($q = p, r = 0$)은 한 꼭짓점에 매달면 대각선이 연직이 되고, 반대쪽 극단($q = 2p$, $r = p$)에서 도형은 직각삼각형 ACD가 되는데, 그 도심 $(\frac{2p}{3}, \frac{q}{3})$도 역시 $a = b$를 만족한다.

검산

- $r = 0$으로 두면 직사각형의 중심 $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$가 다시 나오고, $r = p$이면 삼각형 ACD의 도심 $(\frac{2p}{3}, \frac{q}{3})$가 나온다.
- $p = 1, q = 1.5$일 때 공식은 $r = 1.5 - \sqrt{0.75} \approx 0.634$를 주고, 이때 $a = b \approx 0.634$이므로 AG는 실제로 AD와 45°를 이룬다. 다른 근 ≈ 2.37은 $p = 1$보다 크다.
- 또한 무작위로 고른 수천 개의 p, q, r에 대하여 무게중심 공식을 일반적인 다각형 도심 공식과 비교하여 확인하였다.

흔한 실수

- 삼각형의 도심을 $(\frac{r}{3}, \frac{q}{3})$로 잡는 것: 세 꼭짓점 중 두 개가 높이 q에 있으므로 도심의 높이는 $\frac{2q}{3}$이다.
- 삼각형의 모멘트를 빼지 않고 더하는 것: 사다리꼴은 직사각형에서 삼각형을 뺀 것이다.
- "r은 작아야 한다"는 막연한 이유로 양의 부호를 버리는 것. 진짜 이유는 $r \leq p$이며, 이를 보이려면 $q \geq p$인지 아닌지로 경우를 나누는 짧은 논증이 필요하다.

STEP 너머

빼기로 질량중심(centre of mass)을 구하는 것은 $\iint x \, \mathrm{d}A \big/ \iint \mathrm{d}A$를 계산하는 것의 이산적인 형태이며, 대학에서는 밀도가 변하는 박판이나 입체에 대해 이중적분(double integral)으로 같은 아이디어를 만나게 된다. 매달기 조건은 일반적인 원리의 가장 간단한 경우이다. 한 점을 축으로 고정된 강체(rigid body)는 질량중심이 축의 바로 아래에 있을 때, 즉 퍼텐셜 에너지(potential energy)가 최소일 때 안정 평형 상태에 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량중심과 강체의 평형을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.