풀이

STEP I 2003, 문제 1

순수수학 • 거듭제곱의 합

> **STEP I 2003, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q1

핵심 아이디어

문제에서 답의 꼴, 즉 계수(coefficient)를 모르는 n에 대한 다항식(polynomial)이 주어졌으므로, 남은 일은 그 계수들을 정확히 정하는 것뿐이다. 모든 n에 대하여 성립하는 다항식 항등식(identity)은 계산하기 편한 몇몇 n의 값에 대해서도 당연히 성립하고, 각 값마다 일차방정식(linear equation)이 하나씩 얻어진다. 합을 음의 첨자에서 시작하는 것은 의도된 요령이다. 이렇게 하면 $n=-1$이나 $n=-2$ 같은 작은 값을 쓸 수 있어서 방정식이 보기 좋게 대칭적인 꼴이 된다.

풀이

문제에서는 r를 합의 변수(summation variable)와 계수 두 가지로 모두 쓰고 있다. 혼동을 피하기 위해 합의 변수를 k로 쓰고, p, q, r, s와 a, b, c, d, e는 계수로 남겨 둔다.

제곱의 합

$S(n) = \sum_{k=-1}^{n} k^2$이라 하면

$$S(n) = pn^3 + qn^2 + rn + s.$$

$k=-1$에서 시작하는 합은 $n \geq -1$인 모든 n에 대하여 의미가 있고,

$$S(-1) = 1, \qquad S(0) = 1+0 = 1, \qquad S(1) = 1+0+1 = 2, \qquad S(2) = 1+0+1+4 = 6.$$

이다. 주어진 꼴에 $n = -1, 0, 1, 2$를 대입하면 다음 네 방정식을 얻는다.

$$-p + q - r + s = 1, \tag{1}$$
$$s = 1, \tag{2}$$
$$p + q + r + s = 2, \tag{3}$$
$$8p + 4q + 2r + s = 6. \tag{4}$$

(2)에서 $s = 1$이므로 (1)과 (3)은 각각 $-p + q - r = 0$과 $p + q + r = 1$이 된다. 두 식을 더하면 $2q = 1$이므로 $q = \frac{1}{2}$이고, 따라서 $p + r = \frac{1}{2}$이다. 식 (4)는

$$8p + 2 + 2r + 1 = 6 \quad \Longrightarrow \quad 8p + 2r = 3 \quad \Longrightarrow \quad 6p + 2(p + r) = 3,$$

이 되므로 $6p = 2$이고, $p = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$이다. 따라서

$$\sum_{k=-1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n + 1.$$

생각해 보기 문제에서 원하는 것은 $k = 0$부터의 합인데, 우리가 구한 것은 $k = -1$부터의 합이다. 두 합은 어떻게 다른가?

두 합은 $k = -1$인 항, 즉 $(-1)^2 = 1$만큼만 다르다. 그러므로

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n = \tfrac{1}{6}n\left(2n^2 + 3n + 1\right) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

세제곱의 합

이번에는 $T(n) = \sum_{k=-2}^{n} k^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$라 하자. 미지수가 다섯 개이므로 다섯 개의 값 $n = -2, -1, 0, 1, 2$를 사용한다.

$$T(-2) = -8, \quad T(-1) = -9, \quad T(0) = -9, \quad T(1) = -8, \quad T(2) = 0.$$

이로부터 다음을 얻는다.

$$16a - 8b + 4c - 2d + e = -8, \tag{5}$$
$$a - b + c - d + e = -9, \tag{6}$$
$$e = -9, \tag{7}$$
$$a + b + c + d + e = -8, \tag{8}$$
$$16a + 8b + 4c + 2d + e = 0. \tag{9}$$

(7)에서 $e = -9$이다. 방정식들이 $\pm n$에서 짝을 이루므로, 각 짝을 더하고 빼는 것이 유리하다. 그러면 짝수 차수와 홀수 차수가 분리된다.

$e = -9$를 이용하면 (6)과 (8)은 $a - b + c - d = 0$과 $a + b + c + d = 1$이 된다. 두 식을 더하고 빼면

$$a + c = \tfrac{1}{2}, \qquad b + d = \tfrac{1}{2}.$$

마찬가지로 (5)와 (9)는 $16a - 8b + 4c - 2d = 1$과 $16a + 8b + 4c + 2d = 9$가 된다. 두 식을 더하고 빼면

$$32a + 8c = 10, \qquad 16b + 4d = 8,$$

즉 $16a + 4c = 5$이고 $4b + d = 2$이다. $c = \frac{1}{2} - a$를 대입하면 $12a + 2 = 5$이므로 $a = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{4}$이다. $d = \frac{1}{2} - b$를 대입하면 $3b + \frac{1}{2} = 2$이므로 $b = \frac{1}{2}$, $d = 0$이다. 따라서

$$\sum_{k=-2}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2 - 9.$$

$k = -2$부터의 합은 $k = 0$부터의 합에 비해 $(-2)^3 + (-1)^3 = -9$라는 항을 더 포함하므로 9를 더한다.

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2 = \tfrac{1}{4}n^2\left(n^2 + 2n + 1\right) = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

검산

$n = 10$일 때 공식은 $\frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 = 385$와 $\frac{1}{4} \cdot 100 \cdot 121 = 3025$를 주는데, $0^2 + 1^2 + \cdots + 10^2$과 $0^3 + 1^3 + \cdots + 10^3$을 직접 더해 보아도 같은 값이 나온다. 또한 $3025 = 55^2 = (0 + 1 + \cdots + 10)^2$임에 주목하자. 처음 n개의 세제곱의 합은 처음 n개의 정수의 합의 제곱이다. 우리는 컴퓨터로도 두 공식이 0부터 59까지의 모든 n에 대하여 정확히 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- 우리가 계산한 합에서 문제가 원하는 합으로 넘어갈 때 $k = -1$인 항(또는 $k = -2$와 $k = -1$인 항)을 빠뜨리는 것. $(-2)^3 + (-1)^3 = -9$이지 $+9$가 아님에 주의하라.
- 세제곱의 경우에 n의 값을 네 개만 쓰려고 하는 것. 미지수가 다섯 개이면 방정식도 다섯 개가 필요하다.
- 계수 r와 문제에 나오는 합의 변수 r를 혼동하는 것. 둘 중 하나의 이름을 바꾸면 실수를 피할 수 있다.

STEP 너머

답이 차수가 하나 더 높은 다항식이라고 가정해도 되는 이유는 무엇일까? 차수가 $m+1$인 다항식의 차분 $P(n)-P(n-1)$은 차수가 m이므로, 차분이 n^m이 되는 다항식을 언제나 구할 수 있기 때문이다. 이것이 **차분법**(*calculus of finite differences*)의 출발점이며, 일반적으로 나타나는 계수는 베르누이 수(Bernoulli numbers)로 결정된다(파울하버 공식(Faulhaber's formula)). 여기서 사용한 방법, 즉 몇몇 점에서의 값으로 다항식을 결정하는 방법은 **다항식 보간법**(*polynomial interpolation*)이며, 수치해석(numerical analysis)에서 라그랑주 보간법(Lagrange interpolation)으로 다시 등장한다. 이런 성격의 문제를 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.