풀이

STEP III 2002, 문제 9

역학 • 질량중심과 넘어짐

STEP III 2002, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q9

핵심 아이디어

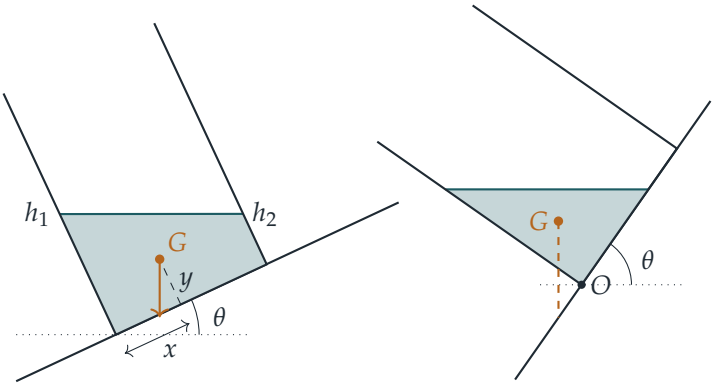
유체의 자유 표면(free surface)은 수평이므로, (θ만큼 기울어진) 용기의 기준틀에서 보면 밑면에 대하여 각 θ로 기울어진 직선이다. 따라서 유체의 단면은 표면이 양쪽 옆벽과 모두 만나면 사다리꼴(trapezium)이 되고, 표면이 위쪽 벽에 닿기 전에 밑면에 이르면 직각삼각형(right-angled triangle)이 된다. 그러면 질량중심(centre of mass)을 구하는 일은 2차원 도심(centroid) 계산이 된다. 넘어짐(toppling)에 대해서는, 용기가 가벼우므로 모든 것은 유체의 질량중심을 지나는 연직선이 평면과 어디에서 만나는지에 달려 있다.

풀이

설정

용기는 벽의 두께를 무시할 수 있는 가벼운 각기둥(prism)으로, 유체는 용기에 대하여 정지해 있는 균일한 연속체로, 평면은 미끄러짐을 막을 만큼 충분히 거친 것으로 모형화한다. 밑면의 수평한 모서리에 수직인 연직 단면은 모두 같고 유체가 균일하므로, 유체의 질량중심은 한 단면의 도심이다. 그 단면의 폭은 a이고 넓이는 $ka^3/a = ka^2$이다.

X는 아래쪽 옆벽에서부터 밑면을 따라 (비탈 위쪽으로) 재고, Y는 밑면에 수직으로 잰다. X가 커짐에 따라 밑면은 수평에 대하여 각 θ로 올라가므로, 수평한 표면은 밑면에 대하여 각 θ로 내려간다. 즉 X가 한 단위 늘 때마다 밑면 위 표면의 높이는 $\tan\theta$만큼 줄어든다. 폭 전체에 걸친 총 감소량을 $d = a\tan\theta$라 하자.



왼쪽 그림은 $k > \frac{1}{2}\tan\theta$인 경우(유체가 양쪽 벽에 모두 닿는 경우)이고, 오른쪽 그림은 $\theta > 45°$이면서 $k < \frac{1}{2}\tan\theta$인 경우로, G를 지나는 연직선이 밑면을 벗어난다.

$k > \frac{1}{2}\tan\theta$인 경우

아래쪽 벽과 위쪽 벽에서의 깊이를 각각 h_1, h_2라 하자. 그러면 $h_1 - h_2 = d$이고, 사다리꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}a(h_1 + h_2) = ka^2$이므로 $h_1 + h_2 = 2ka$이다. 따라서

$$h_2 = ka - \tfrac{1}{2}d = a(k - \tfrac{1}{2}\tan\theta),$$

이고, 이 값은 정확히 $k > \frac{1}{2}\tan\theta$일 때 양수이다. 그러므로 이것이 표면이 양쪽 벽과 모두 만나는 경우이다.

사다리꼴을 $a \times h_2$ 직사각형과, 그 위에 놓인, 두 직각변이 $a(Y = h_2$를 따라)와 d(아래쪽 벽을 따라 위로)인 직각삼각형으로 나눈다.

- 직사각형: 넓이 ah_2, 도심 $\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}h_2\right)$.
- 삼각형: 꼭짓점이 $(0, h_2)$, (a, h_2), $(0, h_2 + d)$이므로 넓이는 $\frac{1}{2}ad$이고, 도심(꼭짓점들의 평균)은 $\left(\frac{1}{3}a,\ h_2 + \frac{1}{3}d\right)$이다.

전체 넓이가 ka^2이므로, 아래쪽 벽에 대한 모멘트(moment)를 취하면

$$ka^2\,x = ah_2 \cdot \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}ad \cdot \tfrac{1}{3}a \quad\Longrightarrow\quad kx = \tfrac{1}{2}h_2 + \tfrac{1}{6}d = \tfrac{1}{2}ka - \tfrac{1}{4}d + \tfrac{1}{6}d = \tfrac{1}{2}ka - \tfrac{1}{12}d.$$

ka로 나누고 $d = a\tan\theta$를 이용하면

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2} - \frac{\tan\theta}{12k}.$$

밑면에 대한 모멘트를 취하면

$$ka^2\,y = ah_2 \cdot \tfrac{1}{2}h_2 + \tfrac{1}{2}ad\left(h_2 + \tfrac{1}{3}d\right),$$
$$ka\,y = \tfrac{1}{2}h_2^2 + \tfrac{1}{2}dh_2 + \tfrac{1}{6}d^2 = \tfrac{1}{2}h_2(h_2 + d) + \tfrac{1}{6}d^2.$$

이제 $h_2 = ka - \frac{1}{2}d$이고 $h_2 + d = ka + \frac{1}{2}d$이므로 $h_2(h_2 + d) = k^2a^2 - \frac{1}{4}d^2$이고

$$ka\,y = \tfrac{1}{2}k^2a^2 - \tfrac{1}{8}d^2 + \tfrac{1}{6}d^2 = \tfrac{1}{2}k^2a^2 + \tfrac{1}{24}d^2.$$

ka^2으로 나누면

$$\frac{y}{a} = \frac{k}{2} + \frac{\tan^2\theta}{24k},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

$k < \frac{1}{2}\tan\theta$인 경우

이제 h_2가 음수가 되어야 하므로, 표면은 아래쪽 벽에서 어떤 거리 $b < a$인 곳에서 밑면과 만나고, 유체의 단면은 두 직각변이 밑면을 따라 b, 아래쪽 벽을 따라 위로 h인 직각삼각형이다. 표면의 기울기로부터 $h = b\tan\theta$이고, 넓이로부터 $\frac{1}{2}bh = ka^2$이다. 따라서 $b^2\tan\theta = 2ka^2$이고

$$b = a\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}, \qquad h = a\sqrt{2k\tan\theta}.$$

(실제로 $b < a$인 것은 바로 $2k < \tan\theta$이기 때문이다. 용기는 충분히 높으므로 h는 문제가 되지 않는다.) 삼각형의 도심은 각 직각변을 따라 3분의 1 지점에 있으므로

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}} = \frac{1}{3}\sqrt{2k\cot\theta}, \qquad \frac{y}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{2k\tan\theta}.$$

$k = \frac{1}{2}\tan\theta$에서 두 쌍의 공식은 모두 $x/a = \frac{1}{3}$, $y/a = \frac{1}{3}\tan\theta$를 주므로, 두 경우는 매끄럽게 이어진다.

넘어짐

생각해 보기 놓는 순간 용기가 넘어지는지 아닌지는 무엇이 결정하는가?

용기가 가벼우므로 무게는 유체의 무게뿐이고, 이는 질량중심 G를 지나 연직 방향으로 작용한다. 평면은 밑면만을 밀 수 있으므로, 수직항력(normal reaction)은 아래쪽 모서리 O와 위쪽 모서리 사이의 밑면 어딘가에 작용한다. G를 지나는 연직선이 O보다 비탈 아래쪽에서 평면과 만나면, 무게는 O에 대하여 그러한 항력으로는 상쇄할 수 없는 모멘트를 가지며, 용기는 O를 중심으로 회전한다. 즉 넘어진다.

O를 원점으로 하고, x는 비탈 위쪽으로, y는 비탈에 수직으로 잡자. 연직 아래 방향은 이 축에서 성분 $(-\sin\theta, -\cos\theta)$를 가지므로, $G = (x, y)$에서 연직선을 따라 거리 $y\sec\theta$만큼 내려가면 평면의 다음 위치에 이른다.

$$x - y\tan\theta.$$

따라서 $x < y\tan\theta$이면 용기는 넘어진다.

$k < \frac{1}{2}$이고 $\theta > 45°$라 하자. 그러면 $\tan\theta > 1 > 2k$이므로 $k < \frac{1}{2}\tan\theta$이고, 삼각형인 경우에 해당한다. 이때

$$y\tan\theta - x = \frac{a}{3}\left(\sqrt{2k\tan\theta}\,\tan\theta - \sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}\right) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}\left(\tan^2\theta - 1\right) > 0,$$

인데, 이는 $\tan\theta > 1$이기 때문이다. 따라서 $x < y\tan\theta$이다. 즉 G를 지나는 연직선은 아래쪽 모서리보다 아래를 지나고, $k < \frac{1}{2}$의 값이 무엇이든 용기는 넘어진다. (삼각형인 경우, 같은 계산으로 $\theta < 45°$이면 용기가 안정함을 알 수 있으므로, 이 경우에는 $45°$가 정확히 경계값이다.) 이것이 구하는 결과이다. 조건 $k < \frac{1}{2}$는 $\theta > 45°$일 때 삼각형인 경우가 됨을 보장하는 역할을 한다.

검산

- $\theta = 0$이면 첫 번째 경우에서 $x = \frac{1}{2}a$, $y = \frac{1}{2}ka$를 얻는데, 이는 깊이가 ka인 유체 덩어리의 중심이다.
- 두 경우는 사다리꼴이 삼각형으로 퇴화하는 $k = \frac{1}{2}\tan\theta$에서 일치한다.
- 수치 검산: 무작위로 고른 300개의 쌍 (k, θ)에 대하여 유체 영역을 직접 적분한 결과, ($a = 1$일 때) 두 쌍의 공식과 1.4×10^{-6} 이내로 일치하였다. 예를 들어 $\theta = 55°$, $k = 0.3$이면 $x \approx 0.216a$, $y \approx 0.309a$이고 $y\tan\theta \approx 0.441a > x$이므로 넘어진다.

흔한 실수

- 표면을 밑면과 평행하게 그리거나 반대 방향으로 기울게 그리는 것. 유체는 **아래쪽** 벽 쪽에 쌓인다.
- 용기가 가볍다는 것을 잊고 용기의 무게를 더하는 것. 용기의 질량중심은 유체의 질량중심과 같다.
- G를 지나는 연직선을 아래쪽 모서리 O가 아니라 밑면의 중심과 비교하는 것.

STEP 너머

"질량중심을 지나는 연직선이 밑면과 만나는가?"라는 판정은 안정성 분석(stability analysis)의 가장 간단한 경우이다. 물에 뜬 배도 같은 방식으로 다루지만, 그때는 부력(buoyancy)이 배가 밀어낸 물의 질량중심을 지나 작용하며, 이 점은 배가 기울어짐에 따라 움직인다. 이로부터 경심(metacentre)이라는 개념이 나온다. (놓은 뒤 출렁이는) 움직이는 유체는 유체역학(fluid dynamics)에서 훨씬 더 어려운 문제이다. Kleppner와

Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체(rigid body)의 평형과 축에 대한 회전을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.