풀이

STEP III 2002, 문제 8

순수수학 • 프톨레마이오스 정리

> **STEP III 2002, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q8

핵심 아이디어

단위원(unit circle) 위의 두 점의 차는 "평균" 각을 밖으로 빼내면 아름답게 인수분해된다: $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)/2}(e^{i(\alpha-\beta)/2} - e^{-i(\alpha-\beta)/2})$이고, 괄호 안은 사인의 2i배이다. 이것으로 모든 현(chord)의 절댓값(modulus)과 편각(argument)을 한꺼번에 얻는다. 마지막 부분에서는, 편각이 같은 두 복소수는 같은 방향을 가리키므로 그 절댓값이 그대로 더해진다. 그러면 남은 일은 세 곱을 잇는 대수적 항등식을 찾는 것뿐이다.

풀이

$u_1 - u_2$의 편각

$u_k = e^{i\theta_k}$라 하자. 인수 $e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$를 묶어 내면

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}\left(e^{i(\theta_1-\theta_2)/2} - e^{-i(\theta_1-\theta_2)/2}\right) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} \cdot 2i \sin\tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \cdot (-i)\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\, e^{i(\theta_1+\theta_2-\pi)/2}, \end{aligned}$$

이다. 마지막 줄에서는 $-i = e^{-i\pi/2}$를 이용했다.

> **생각해 보기** 왜 이 식에서 편각을 곧바로 읽어 낼 수 있을까? 그리고 왜 사인을 $\sin\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$가 아니라 $\sin\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)$의 꼴로 써야 할까?

$re^{i\phi}$ 꼴의 수가 (2π의 배수 차이를 무시하고) 편각 ϕ를 갖는 것은 $r > 0$일 때뿐이다. 여기서는 $0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$이므로 $0 < \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) < \pi$이고, 사인은 순양수이다. 거꾸로 쓰면 사

인이 음수가 되어 편각이 π만큼 어긋난다.

따라서 $|u_1 - u_2| = 2\sin\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)$이고, $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 - \pi)$는 $u_1 - u_2$의 한 편각이다. arg를 $(-\pi, \pi]$에 속하는 주치(principal value)로 잡자. $-\pi < \theta_1 < \theta_2 < \pi$이므로

$$-\tfrac{3\pi}{2} < \tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 - \pi) < \tfrac{\pi}{2}.$$

이 값이 $-\pi$보다 크면 이미 주편각이다($n = 0$). 그렇지 않으면 $(-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$에 속하므로 2π를 더하면 범위 안으로 들어온다($n = 1$). 그러므로

$$\arg(u_1 - u_2) = \tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 - \pi) + 2n\pi, \qquad n = 0 \text{ 또는} 1,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

두 곱의 편각이 같다

위의 논증에서 u_1, u_2에 대해 쓴 것은 $\theta_1 < \theta_2$이고 둘 다 $(-\pi, \pi)$에 속한다는 사실뿐이다. 따라서 임의의 $j < k$에 대하여

$$\begin{aligned} u_j - u_k &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_k - \theta_j)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_j + \theta_k - \pi)/2}, \\ u_k - u_j = -(u_j - u_k) &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_k - \theta_j)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_j + \theta_k + \pi)/2}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$를 이용했고, 두 경우 모두 앞에 붙은 실수 인수는 양수이다. $j < k$에 대하여 $s_{jk} = \sin\frac{1}{2}(\theta_k - \theta_j) > 0$이라 쓰고, $\Sigma = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$라 하자. 곱하면 (편각은 더해진다)

$$\begin{aligned} (u_1 - u_2)(u_4 - u_3) &= 4s_{12}s_{34}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\theta_1 + \theta_2 - \pi) + (\theta_3 + \theta_4 + \pi)]/2} = 4s_{12}s_{34}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}, \\ (u_1 - u_4)(u_3 - u_2) &= 4s_{14}s_{23}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\theta_1 + \theta_4 - \pi) + (\theta_2 + \theta_3 + \pi)]/2} = 4s_{14}s_{23}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}. \end{aligned}$$

둘 다 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$의 양수배이므로, 각각 2π의 배수 차이를 무시하면 편각이 $\frac{1}{2}\Sigma$이다. 따라서 두 주편각은 2π의 배수만큼만 다를 수 있다:

$$\arg((u_1 - u_2)(u_4 - u_3)) = \arg((u_1 - u_4)(u_3 - u_2)) + 2n\pi$$

를 만족하는 정수 n이 존재한다. (사실 2π의 배수만큼 차이 나는 두 주편각은 같아야 하므로 $n = 0$이지만, 문제에서 요구한 것은 이보다 약한 명제뿐이다.)

마지막 부분

세 곱을

$$A = (u_1 - u_2)(u_4 - u_3), \qquad B = (u_1 - u_4)(u_3 - u_2), \qquad C = (u_1 - u_3)(u_4 - u_2).$$

라 하자. 전개하면

$$\begin{aligned} A+B &= (u_1u_4 - u_1u_3 - u_2u_4 + u_2u_3) + (u_1u_3 - u_1u_2 - u_3u_4 + u_2u_4) \\ &= u_1u_4 + u_2u_3 - u_1u_2 - u_3u_4, \\ C &= u_1u_4 - u_1u_2 - u_3u_4 + u_2u_3, \end{aligned}$$

이므로 $A+B=C$이다. 이것은 순수한 대수이며 임의의 네 복소수에 대해 성립한다.

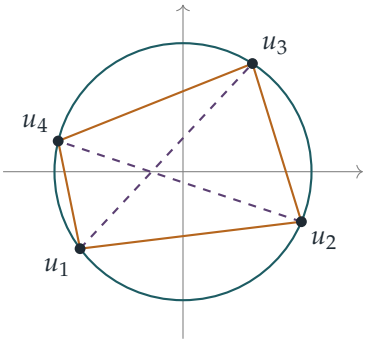
이제 앞 부분의 결과를 쓰자: $a = 4s_{12}s_{34} > 0$, $b = 4s_{14}s_{23} > 0$에 대하여 $A = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$, $B = b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$이다. 그러면 $|A| = a$, $|B| = b$이고,

$$|C| = |A+B| = |(a+b)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}| = a+b = |A| + |B|,$$

이다. $a+b>0$이고 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}| = 1$이기 때문이다. 즉,

$$|(u_1-u_2)(u_4-u_3)| + |(u_1-u_4)(u_3-u_2)| = |(u_1-u_3)(u_4-u_2)|.$$

요점은, 삼각부등식(triangle inequality) $|A+B| \le |A| + |B|$가 등식이 되는 것은 정확히 A와 B가 같은 방향을 가리킬 때이며, 바로 그것을 가운데 부분에서 확립했다는 것이다.



기하학적으로 $|u_j - u_k|$는 현의 길이이고, 편각이 증가하므로 $u_1u_2u_3u_4$는 꼭짓점이 차례로 놓인, 원에 내접하는 사각형(inscribed quadrilateral)이다. 이 항등식은 마주 보는 변끼리의 곱의 합이 두 대각선(점선)의 곱과 같다는 것을 말한다. 이것이 바로 프톨레마이오스(Ptolemy)의 정리이다.

검산

- 정사각형: $\theta_k = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$. 각 변은 $\sqrt{2}$, 각 대각선은 2이고, 실제로 $2+2=4$이다.
- $\theta = (-2.5, -0.4, 1.0, 2.9)$로 두면 $|A| \approx 2.8223$, $|B| \approx 1.1013$, $|C| \approx 3.9236 = |A| + |B|$를 얻는다.

- 크기 순으로 정렬된 θ_k를 무작위로 2×10^5번 골랐을 때, $\arg(u_1 - u_2)$에 대한 공식은 매번 $n = 0$ 또는 1로 성립했고(두 값 모두 나타난다), 항등식은 2×10^{-15} 이내의 오차로 성립했다.

흔한 실수

- $u_1 - u_2 = 2\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}$로 쓰고, 사인이 음수라는 것을 잊은 채 편각을 $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \pi)$로 읽는 것.
- $u_4 - u_3$의 편각이 $u_3 - u_4$의 편각과 같다고 취급하는 것: 차의 순서를 뒤집으면 편각에 π가 더해진다.
- 이유를 밝히지 않고 $|A| + |B| = |A + B|$라고 단정하는 것. 이것이 성립하려면 A와 B의 편각이 같아야 한다.

STEP 너머

프톨레마이오스의 정리에는 역(converse)과 더 일반적인 형태가 있다: 평면 위의 임의의 네 점에 대하여 $|A| + |B| \geq |C|$이고(이는 $A + B = C$에 삼각부등식을 적용한 것일 뿐이다), 등호는 정확히 네 점이 원이나 직선 위에 차례로 놓일 때 성립한다. 그 배후에는 **복비**(*cross-ratio*) $\frac{(u_1-u_2)(u_3-u_4)}{(u_1-u_4)(u_3-u_2)}$가 있다. 이것은 네 점이 한 원 위에 있을(concyclic) 때 정확히 실수가 되고, 뫼비우스 변환(Möbius transformation)에 의해 보존되며, 대학 1학년 복소해석학(complex analysis)과 기하학의 핵심 대상이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 아이디어를 멋진 그림과 함께 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.