풀이

STEP III 2002, 문제 7

순수수학 • 좌표기하의 항등식

STEP III 2002, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q7

핵심 아이디어

식 $s^2 + b^2 - a^2$는 낯익어 보여야 한다. $OA = s$, $OB = b$인 삼각형 OAB에서 코사인 법칙(cosine rule)을 쓰면 바로 이 식이 나온다. 따라서 첫 번째 항등식(identity)은 사실 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta$에 관한 처음 결과를 OB가 두 좌표축과 이루는 두 각에 적용한 것이다. 그다음 두 번째 항등식은 첫 번째 항등식 위에 세운 순수한 대수 계산이고, 부등식(inequality)은 두 제곱의 합이 각 제곱보다 크거나 같다는 사실에서 저절로 나온다.

풀이

각에 관한 결과

먼저 $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$라고 하자. 그러면 $\cos\beta = \cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin\alpha$이므로

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

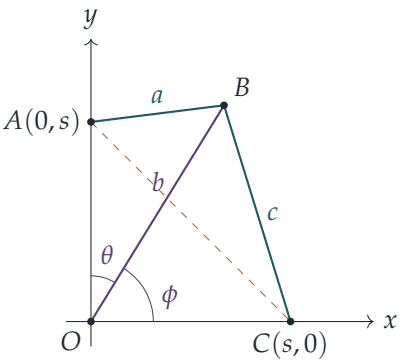
역으로 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$이라고 하자. 그러면 $\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$이다. α와 β가 모두 예각(acute angle)이므로 $\cos\beta > 0$, $\sin\alpha > 0$이고, 양의 제곱근을 취하면

$$\cos\beta = \sin\alpha = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha).$$

이제 β와 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$는 모두 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 속하는데, 이 구간에서 코사인은 순감소(strictly decreasing)하므로 각 값을 한 번씩만 취한다. 따라서 $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$, 즉 $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$이다. 이로써 "필요충분조건(if and only if)"이 증명되었다.

첫 번째 항등식

$\theta = \angle AOB$, $\phi = \angle BOC$라고 하자.



삼각형 OAB(변 $OA = s, OB = b, AB = a$)와 삼각형 OCB(변 $OC = s, OB = b, CB = c$)에 코사인 법칙을 쓰면

$$\cos\theta = \frac{s^2 + b^2 - a^2}{2sb}, \qquad \cos\phi = \frac{s^2 + b^2 - c^2}{2sb}.$$

B가 열린 제1사분면(first quadrant)에 있으므로, 반직선 OB는 (OA 방향의) 양의 y축과 (OC 방향의) 양의 x축 사이에 엄격하게 놓인다. 따라서 θ와 ϕ는 모두 예각이고 $\theta + \phi = \frac{1}{2}\pi$이다. 위에서 보인 "only if" 방향에 의해 $\cos^2\theta + \cos^2\phi = 1$, 즉

$$\frac{(s^2 + b^2 - a^2)^2}{4s^2b^2} + \frac{(s^2 + b^2 - c^2)^2}{4s^2b^2} = 1.$$

양변에 $4s^2b^2$를 곱하면 첫 번째 항등식을 얻는다.

$$(s^2 + b^2 - a^2)^2 + (s^2 + b^2 - c^2)^2 = 4s^2b^2.$$

(직접 확인하려면 $B = (x, y)$라고 놓는다. 그러면 $a^2 = x^2 + (y - s)^2$, $b^2 = x^2 + y^2$, $c^2 = (x - s)^2 + y^2$이므로 $s^2 + b^2 - a^2 = 2sy$, $s^2 + b^2 - c^2 = 2sx$이고, 좌변은 $4s^2(x^2 + y^2) = 4s^2b^2$이다.)

두 번째 항등식

계산을 깔끔하게 하기 위해

$$P = s^2 + b^2 - a^2, \qquad Q = s^2 + b^2 - c^2, \qquad S = s^2 + b^2, \qquad D = s^2 - b^2,$$

로 놓으면 $a^2 = S - P$, $c^2 = S - Q$이다. 첫 번째 항등식은 $P^2 + Q^2 = 4s^2b^2$라는 뜻이다. $4s^2b^2 = (s^2 + b^2)^2 - (s^2 - b^2)^2 = S^2 - D^2$이므로 이를

$$D^2 = S^2 - P^2 - Q^2. \qquad (\dagger)$$

로 다시 쓸 수 있다. 이제 $a^2 + c^2 = 2S - P - Q$이고 $2s^2 = S + D$, $2b^2 = S - D$이므로

$$2s^2 - a^2 - c^2 = (P + Q - S) + D, \qquad 2b^2 - a^2 - c^2 = (P + Q - S) - D.$$

생각해 보기 왜 $(P+Q-S)\pm D$로 나누는 것이 가치가 있을까?

$(u+D)^2+(u-D)^2=2u^2+2D^2$이기 때문이다. 교차항이 소거되어 D는 D^2의 꼴로만 나타나고, (†)를 이용하면 이를 P, Q, S만으로 이루어진 식으로 바꿀 수 있다. $u=P+Q-S$로 놓으면

$$\begin{aligned}&(2s^2-a^2-c^2)^2+(2b^2-a^2-c^2)^2\\&\quad=2(P+Q-S)^2+2D^2\\&\quad=2(P^2+Q^2+S^2+2PQ-2PS-2QS)+2(S^2-P^2-Q^2)\\&\quad=4S^2-4PS-4QS+4PQ\\&\quad=4(S-P)(S-Q)\\&\quad=4a^2c^2,\end{aligned}$$

이고, 둘째 줄에서 (†)를 사용하였다. 이것이 두 번째 항등식이다.

부등식

두 번째 항등식 좌변의 두 제곱은 모두 음이 아니므로

$$(2b^2-a^2-c^2)^2\le 4a^2c^2,\qquad \text{따라서}\qquad |2b^2-a^2-c^2|\le 2ac,$$

이다. 여기서 음이 아닌 제곱근을 취하였다($a,c>0$에 주의한다). 이는

$$-2ac\le 2b^2-a^2-c^2\le 2ac,$$

즉

$$a^2-2ac+c^2\le 2b^2\le a^2+2ac+c^2,$$

을 뜻하며, 이것이 곧 $(a-c)^2\le 2b^2\le(a+c)^2$이므로 증명이 끝난다.

등호는 정확히 $2s^2=a^2+c^2$일 때 성립한다. $AC^2=2s^2$이므로 피타고라스(Pythagoras) 정리의 역에 의해 이는 $\angle ABC$가 직각이라는 뜻이다. 즉 B는 AC를 지름으로 하는 원 위에 있다.

검산

- $s=2$, $B=(1,3)$으로 놓자. 그러면 $a^2=2$, $b^2=c^2=10$이다. 첫 번째 항등식은 $12^2+4^2=160=4\cdot 4\cdot 10$, 두 번째 항등식은 $(-4)^2+8^2=80=4\cdot 2\cdot 10$이 되고, 부등식은 $3.06\le 20\le 20.94$가 된다.
- 점 $B=(s,s)$는 정사각형의 네 번째 꼭짓점이므로 $\angle ABC$는 직각이고 $a=c=s$, $b=s\sqrt{2}$이다. 이때 $2b^2=4s^2=(a+c)^2$로 등호가 성립하는 경우이다.

- 2×10^5개의 점 B에서 세 결과를 무작위로 시험한 결과 성립하지 않는 경우는 없었다.

흔한 실수

- 역을 증명할 때 예각 조건을 빠뜨리는 것. 이 조건이 없으면 $\cos^2\beta = \sin^2\alpha$로부터 $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$가 반드시 나오지는 않는다(예를 들어 $\beta = \frac{1}{2}\pi + \alpha$도 성립한다).
- 첫 번째 항등식을 쓰지 않고 두 번째 항등식을 a, b, c, s에 대해 무작정 전개하는 것. 할 수는 있지만 항을 빠뜨리기 쉽다. S, D로 치환하면 계산을 통제할 수 있다.
- $(2b^2 - a^2 - c^2)^2 \leq 4a^2c^2$의 제곱근을 취할 때 절댓값(modulus)을 붙이지 않아 부등식의 절반만 얻는 것.

STEP 너머

양 $2b^2 - a^2 - c^2$는 $2s(x + y - s)$와 같고, 이는 삼각형 ABC의 넓이의 ± 4배이다. 따라서 두 번째 항등식은 코사인 법칙과 넓이 공식 $\frac{1}{2}ac\sin B$를 $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$로 결합한 것이다. 상한은 프톨레마이오스(Ptolemy) 부등식의 한 경우이기도 하다. 임의의 네 점에 대하여 $OB \cdot AC \leq OA \cdot BC + OC \cdot AB$이고, 등호는 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)일 때 성립하는데, 여기서는 이것이 $bs\sqrt{2} \leq s(a + c)$가 된다. 이와 같은 거리 사이의 관계는 거리 공간(metric space)과 거리 기하학(distance geometry)의 연구로 이어진다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 성격의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.