풀이

STEP III 2002, 문제 6

순수수학 • 비선형 미분방정식

STEP III 2002, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q6

핵심 아이디어

네제곱 때문에 방정식이 무시무시해 보이지만, $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$는 정확히 y^2의 도함수(derivative)의 절반이다. 따라서 $u = y^2 - 1$로 치환(substitution)하면 방정식은 u와 u'만으로 이루어진 식으로 단순해지고, 제곱근을 취하면 변수분리(separation of variables)가 가능해진다. 주의할 점은 부호뿐이다. u의 부호에 따라 평면이 띠 영역 $|y| < 1$과 영역 $|y| > 1$로 나뉘고, 각 영역에서 서로 다른 곡선족(family of curves)이 나온다.

풀이

$u = y^2 - 1$로 놓으면 $u' = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$이고 $y^4(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^4 = (\frac{1}{2}u')^4$이다. 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\tfrac{1}{16}(u')^4 = u^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (u')^2 = 4|u|,$$

이는 양변의 음이 아닌 제곱근(non-negative square root)을 취한 것이다($(u')^2$과 $4|u|$ 모두 음이 아니므로 잃는 것이 없다).

먼저 해곡선(solution curve)은 결코 $y = 0$과 만날 수 없다는 점에 주목하자. 그곳에서는 원래 방정식의 좌변이 0이지만 우변은 1이기 때문이다. 따라서 주어진 두 점 중 어느 하나를 지나는 해에서는 언제나 $y > 0$이다.

? **생각해 보기** 어느 부호의 u'를 취할지 고민하지 않고 $(u')^2 = 4u$를 어떻게 풀 수 있을까?

$u > 0$인 곳에서는 $v = \sqrt{u} > 0$으로 두어 $u = v^2$으로 쓸 수 있다. 그러면 $u' = 2vv'$이므로 $(u')^2 = 4u$는 $4v^2(v')^2 = 4v^2$, 즉 $(v')^2 = 1$이 된다. v'은 연속(continuous)이고 결코 0이 되지 않으므로 부호가 일정하다. 따라서 $v' = \pm 1$이고, 어떤 상수 a에 대해 $v = \pm(x - a)$이

다. 어느 경우든

$$u = v^2 = (x-a)^2.$$

이다. 제곱하면 부호의 모호함은 그냥 사라진다. $u < 0$인 경우는 $u = -v^2$으로 두고 같은 논증을 하면 된다.

소문항 (i): $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$을 지나는 해

여기서는 $y^2 = \frac{3}{4} < 1$이므로 이 점 근처에서 $u < 0$, 즉 $|y| < 1$이다. $v > 0$으로 $1 - y^2 = -u = v^2$이라 쓰면, $(u')^2 = -4u$로부터 위와 똑같이 $(v')^2 = 1$을 얻는다. 따라서 $1 - y^2 = (x-a)^2$, 즉

$$(x-a)^2 + y^2 = 1 :$$

이므로, 해곡선은 x축 위에 중심이 있고 반지름이 1인 원이다. $x = 0$에서 $a^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$이어야 하므로 $a = \pm\frac{1}{2}$이다. $y > 0$이므로 $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$을 지나는 해곡선은 다음 두 위쪽 반원이다.

$$y = \sqrt{1 - (x - \tfrac{1}{2})^2} \qquad \text{그리고} \qquad y = \sqrt{1 - (x + \tfrac{1}{2})^2}.$$

직접 확인해 보자. $(x-a)^2 + y^2 = 1$ 위에서 음함수 미분(implicit differentiation)을 하면 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -(x-a)$이므로 $y^4(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^4 = (x-a)^4 = (1-y^2)^2 = (y^2-1)^2$이다. ✓

소문항 (ii): $(0, \frac{1}{2}\sqrt{5})$를 지나는 해

이번에는 $y^2 = \frac{5}{4} > 1$이므로 $u > 0$이고, 위의 논증으로 $y^2 - 1 = (x-a)^2$, 즉

$$y^2 - (x-a)^2 = 1 :$$

을 얻는다. 이는 중심이 $(a, 0)$인 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이다. $x = 0$에서 $a^2 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$이므로 이번에도 $a = \pm\frac{1}{2}$이고, $y > 0$이므로 해곡선은 다음 두 위쪽 가지(branch)이며

$$y = \sqrt{1 + (x - \tfrac{1}{2})^2} \qquad \text{그리고} \qquad y = \sqrt{1 + (x + \tfrac{1}{2})^2},$$

모든 x에서 정의된다. 직접 확인하면 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - a$이므로 좌변은 $(x-a)^4 = (y^2-1)^2$이다. ✓

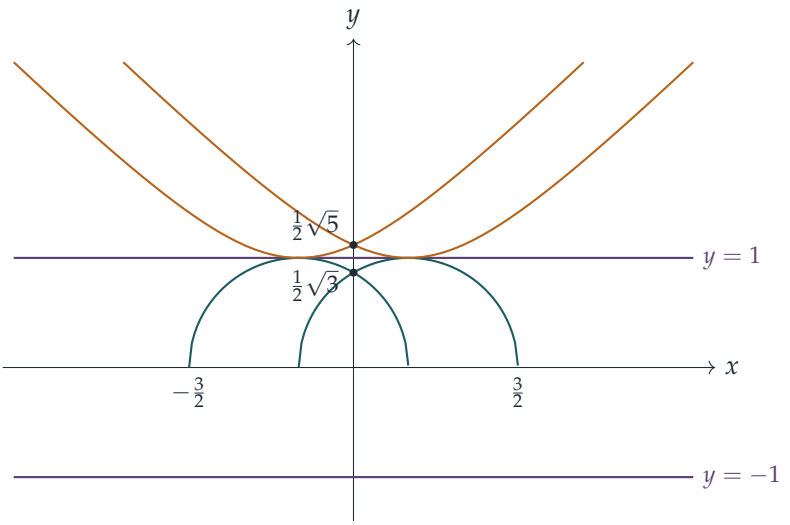
직선 $y = \pm 1$

모든 x에 대해 $y = 1$ 또는 $y = -1$이면 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$이므로 좌변은 0이다. 또 $y^2 - 1 = 0$이므로 우변도 0이다. 두 직선 모두 해이다.

? **생각해 보기** 이 직선들은 원 및 쌍곡선과 어떤 관계가 있을까?

각 원 $(x-a)^2+y^2=1$과 각 쌍곡선 $y^2-(x-a)^2=1$은 $y=1$에 점 $(a,1)$에서 기울기(gradient) 0으로 접한다(마찬가지로 $y=-1$에는 $(a,-1)$에서 접한다). 따라서 $y=\pm1$은 두 곡선족 모두의 **포락선**(envelope)이며, 어느 곡선족에도 속하지 않는다. 이 직선들은 $u=0$에서 나오는데, 이 경우는 v로 나눌 때 제외되었다. 그 결과 $y=1$ 위의 점을 지나는 해는 유일(unique)하지 않다. 예를 들어 $a=\frac{1}{2}$인 원을 따라 $(0,\frac{1}{2}\sqrt{3})$에서 꼭대기 $(\frac{1}{2},1)$까지 간 다음, $y=1$을 따라가다가, 쌍곡선 $y=\sqrt{1+(x-b)^2}$을 따라 $x\geq b$ 구간에서 올라가면(임의의 $b\geq\frac{1}{2}$), 충분히 매끄럽고(기울기가 연속) 모든 곳에서 방정식을 만족하는 곡선을 얻는다. 위의 네 곡선은 주어진 점을 지나는 "기본" 해이고, 그 점들을 지나는 다른 모든 해는 이 곡선들, $y=1$, 그리고 $y=1$에 접하는 또 다른 원과 쌍곡선의 조각들을 이어 붙여 만들어진다.

개형



반원(청록색)은 중심이 $(\pm\frac{1}{2},0)$이고 반지름이 1이며, x축과 $x=\pm\frac{1}{2}\pm1$에서 수직으로 만나고 $x=\pm\frac{1}{2}$에서 $y=1$에 접한다. 쌍곡선의 가지(호박색)는 같은 두 점에서 $y=1$에 접하고 점근선(asymptote)은 $y=\pm(x\mp\frac{1}{2})$이다. 즉 $|x|$처럼 증가한다. 각 쌍은 y축에 대해 대칭이며, 각 쌍의 두 곡선은 그 축 위의 주어진 점에서 교차한다.

검산

- $a=\frac{1}{2}$인 원 위의 점 $(0,\frac{1}{2}\sqrt{3})$에서 $y'=-(x-a)/y=1/\sqrt{3}$이므로 좌변은 $\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{16}$이고 우변은 $(\frac{3}{4}-1)^2=\frac{1}{16}$이다.
- $y'=\pm\sqrt{|y^2-1|}/y$를 $(0,\frac{1}{2}\sqrt{5})$에서 출발하여 더하기 부호를 택해 수치적으로 적분(numerical integration)하면 $y(1.5)=2.2360680$을 얻는데, 이는 $\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$와

일치한다. 이것은 $a = -\frac{1}{2}$인 쌍곡선 위의 값이다.

흔한 실수

- 두 영역 모두에서 제곱근을 $(u')^2 = 4u$로 취하는 것. $|y| < 1$에서는 이 식이 실수해를 갖지 않으므로 원을 놓치게 된다.
- 각 단계에서 제곱근의 한쪽 부호만 택하여, 각 점을 지나는 곡선을 두 개가 아니라 하나만 찾는 것.
- $y = \pm 1$이 모든 곡선에 접하지만 어느 곡선족에도 속하지 않는다는 사실을 잊는 것.

STEP 너머

직선 $y = \pm 1$은 **특이해**(singular solution)이다. 즉 일반해(general solution)의 포락선이면서 상수 a를 어떻게 택해도 얻어지지 않는 해이다. 특이해는 정확히 일계 방정식(first-order equation)에 대한 유일성 정리(피카르–린델뢰프(Picard–Lindelöf) 정리)가 성립하지 않는 곳에서 나타난다. $\sqrt{|y^2 - 1|}$이 $y = \pm 1$에서 립시츠(Lipschitz) 조건을 만족하지 않기 때문이며, 바로 그 때문에 해가 그곳에서 갈라질 수 있다. 이런 종류의 포락선은 y'에 대해 선형이 아닌 일계 방정식의 전형적인 특징이다 (클레로(Clairaut) 방정식이 고전적인 예이다). Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 존재성과 유일성, 그리고 그것이 언제 깨지는지를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.