풀이

STEP III 2002, 문제 5

순수수학 • 사차방정식의 인수분해

> **STEP III 2002, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q5

핵심 아이디어

이차식이 완전제곱식(perfect square)의 상수배가 되는 것은 정확히 그 판별식(discriminant)이 0일 때이다. 첫 부분은 이것이 전부이며, 이것은 나머지 부분을 움직이는 원동력이기도 하다. 이차식의 제곱에서 사차식(quartic)을 뺀 것이 완전제곱식의 상수배가 되도록 t를 고를 수 있다면, 사차식은 **두 제곱의 차**(difference of two squares)가 되고 곧바로 인수분해된다. 이것이 사차식에 대한 페라리(Ferrari)의 고전적인 방법이며, 이 방법은 사차식 문제를 t에 대한 삼차방정식(cubic) 문제로 바꾸어 준다.

풀이

이차식에 대한 조건

$p \neq 0$이라고 하자. 완전제곱식으로 고치면

$$px^2 + qx + r = p\left(x + \frac{q}{2p}\right)^2 + r - \frac{q^2}{4p}.$$

이 식이 어떤 h에 대하여 $p(x+h)^2$ 꼴이 되는 것은 정확히 상수 $r - \frac{q^2}{4p}$가 0일 때, 즉

$$q^2 = 4pr,$$

일 때이며, 이때 $h = \frac{q}{2p}$이다. (거꾸로, $p(x+h)^2 = px^2 + 2phx + ph^2$를 전개하면 $q^2 = 4p^2h^2 = 4pr$이므로, 이 조건은 충분조건일 뿐 아니라 필요조건이기도 하다.) $p = 0$이면 가능한 경우는 $q = r = 0$뿐이다. 이때 조건 $q^2 = 4pr$에서 여전히 $q = 0$이 나오지만, $r = 0$도 따로 필요하다.

t에 대한 방정식

전개하면

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}bx + t)^2 = x^4 + bx^3 + (\tfrac{1}{4}b^2 + 2t)x^2 + btx + t^2.$$

$\frac{1}{2}b$를 고른 것은 바로 사차식을 뺄 때 x^3 항이 소거되도록(x^4 항도 소거된다) 하기 위해서이다.

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}bx + t)^2 - (x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = (\tfrac{1}{4}b^2 + 2t - c)x^2 + (bt - d)x + (t^2 - e).$$

이것은 $p = \frac{1}{4}b^2 + 2t - c$, $q = bt - d$, $r = t^2 - e$인 이차식이고, 우리는 이것이 완전제곱식의 상수배($k = p$배)인 $k(x + h)^2$과 같기를 원한다. 첫 부분에 의하여 t는

$$(bt - d)^2 = 4(\tfrac{1}{4}b^2 + 2t - c)(t^2 - e).$$

을 만족해야 한다. 이것은 t에 대한 삼차방정식이므로(우변의 t^3 항의 계수는 8이고, 좌변은 t에 대한 이차식일 뿐이다), 언제나 적어도 하나의 실근을 가진다.

사차식의 인수분해

여기서 $b = 6, c = 9, d = -2, e = -7$이므로

$$\tfrac{1}{4}b^2 + 2t - c = 2t, \qquad bt - d = 6t + 2, \qquad t^2 - e = t^2 + 7.$$

t에 대한 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}(6t + 2)^2 &= 8t(t^2 + 7)\\ 36t^2 + 24t + 4 &= 8t^3 + 56t\\ 0 &= 2t^3 - 9t^2 + 8t - 1.\end{aligned}$$

? **생각해 보기** 이 삼차방정식의 근을 어떻게 빨리 찾을 수 있을까?

먼저 작은 값을 넣어 본다. 계수의 합이 $2 - 9 + 8 - 1 = 0$이므로 $t = 1$이 근이다. 각 근이 모두 올바른 인수분해를 주므로 어느 근을 써도 된다. 가장 간단한 근이 가장 간단한 인수분해를 준다.

$t = 1$이면 차는

$$2x^2 + 8x + 8 = 2(x + 2)^2,$$

이므로 $k = 2, h = 2$이고, 실제로 $8^2 = 4 \cdot 2 \cdot 8$이다. 따라서

$$(x^2 + 3x + 1)^2 - (x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 2x - 7) = 2(x + 2)^2,$$

즉

$$x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 2x - 7 = (x^2 + 3x + 1)^2 - (\sqrt{2}\,(x + 2))^2.$$

이것은 두 제곱의 차이므로

$$\begin{aligned} x^4+6x^3+9x^2-2x-7 &= (x^2+3x+1-\sqrt{2}(x+2))(x^2+3x+1+\sqrt{2}(x+2)) \\ &= (x^2+(3-\sqrt{2})x+1-2\sqrt{2})(x^2+(3+\sqrt{2})x+1+2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

$k=2>0$이므로 그 제곱근은 실수이고, 따라서 이들은 요구한 대로 실수 계수를 가진 두 이차 인수이다.

삼차방정식의 나머지 두 근은 $2t^2-7t+1=0$에서 나오는 $t=\frac{1}{4}(7\pm\sqrt{41})$이며, 이들도 $k=2t>0$을 만족한다. 이 근들은 사차식의 네 (실)근을 짝지어 실수 계수 이차 인수로 묶는 나머지 두 가지 방법을 준다. 이 경우 계수가 훨씬 복잡하므로 $t=1$을 쓰는 것이다.

검산

- 전개해 본다. 두 인수의 곱에서 x^3의 계수는 $(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})=6$이고 상수항은 $(1-2\sqrt{2})(1+2\sqrt{2})=1-8=-7$이므로 둘 다 맞다.
- $x=1$에서 사차식의 값은 $1+6+9-2-7=7$이고, 인수분해한 식은 $(5-\sqrt{2}-2\sqrt{2})(5+\sqrt{2}+2\sqrt{2})=25-18=7$을 준다.
- 두 인수의 판별식은 $7+2\sqrt{2}\approx 9.83$과 $7-2\sqrt{2}\approx 4.17$로 모두 양수이므로, 사차식은 네 실근을 가진다. 이는 삼차방정식의 세 근이 모두 실수 범위의 인수분해를 준다는 사실과 일치한다. 또한 무작위로 고른 200개의 점에서 인수분해를 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- $(x^2+\frac{1}{2}bx+t)^2$의 x^2 계수를 잘못 구하는 것: $(\frac{1}{2}bx)^2$뿐 아니라 교차항 $2\cdot x^2\cdot t$도 기여하므로 계수는 $\frac{1}{4}b^2+2t$이다.
- 판별식 조건을 $q^2=pr$로 쓰거나, k가 최고차항의 계수 $\frac{1}{4}b^2+2t-c$이며 실수 범위에서 인수분해하려면 이것이 양수여야 한다는 사실을 잊는 것.

STEP 너머

t에 대한 삼차방정식을 **분해 삼차방정식**(resolvent cubic)이라 하며, 이것이 16세기 페라리의 방법이다. 모든 사차방정식은 삼차방정식으로 환원되고, 그 삼차방정식은 카르다노(Cardano)의 공식으로 풀린다. 이 방법이 통하는 더 깊은 이유, 그리고 일반적인 오차방정식에 대해서는 이런 공식이 없는 이유는 다항식의 근들을 어떻게 치환할 수 있는지를 연구하는 갈루아 이론(Galois theory)에 속한다. 체와 다항식의 대수학을 처음 접해 보려면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.