풀이

STEP III 2002, 문제 4

순수수학 • 디오판토스 부등식

> **STEP III 2002, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q4

핵심 아이디어

방정식 $x^3 + x^2 = y^3 - y^2$는 빠르게 커지는 양과 $-y^2$ 때문에 억눌리는 양을 맞붙인다. 그래서 y는 x를 "앞질러야" 하지만, 그 차이는 1보다 작다. 이 두 부등식(inequality)이 y를 x와 $x+1$ 사이에 엄격하게 가두는데, 그 틈에 들어가는 정수(integer)는 없다. 마지막 부분에서는 추가로 생기는 해가 0이나 음수에서만 나올 수 있으며, (m, n)을 $(-n, -m)$으로 바꾸는 깔끔한 대칭(symmetry)이 경우 나누기(casework)를 절반으로 줄여 준다.

풀이

첫 번째 결과

$x, y > 0$이고 $x^3 + x^2 = y^3 - y^2$라 하자. 귀류법(proof by contradiction)으로 $x \geq y$라고 가정한다. 양의 실수에서 세제곱과 제곱은 증가하므로(increasing)

$$x^3 + x^2 \geq y^3 + y^2 > y^3 - y^2,$$

이고, 여기서 엄격한 부등호는 $y^2 > 0$을 이용한 것이다. 이는 주어진 방정식에 모순이므로 $x < y$이다.

두 번째 결과

이제 $0 < x \leq y - 1$이라 하자. 그러면 $y \geq x + 1 > 1$이다. $f(t) = t^3 - t^2$라 두면 $t > \frac{2}{3}$에서 $f'(t) = 3t^2 - 2t = t(3t - 2) > 0$이므로, f는 $[1, \infty)$에서 증가한다. $y \geq x + 1$이고 두 값 모

두 이 구간에 속하므로

$$\begin{aligned} y^3 - y^2 = f(y) &\geq f(x+1) = (x+1)^2((x+1)-1) \\ &= x(x+1)^2 = x^3 + 2x^2 + x \\ &= (x^3 + x^2) + (x^2 + x) \\ &> x^3 + x^2, \end{aligned}$$

이다. $x > 0$이면 $x^2 + x > 0$이기 때문이다. 따라서 요구한 대로 $x^3 + x^2 < y^3 - y^2$이다.

두 결과를 합치면, 양수 x에 대하여 $x^3 + x^2 = y^3 - y^2$를 만족하는 양수 y는 모두

$$x < y < x + 1.$$

을 만족한다.

양의 정수 쌍은 없다

양의 정수 a와 b가 $a^3 - b^3 = a^2 + b^2$를 만족한다고 하자. 우변이 양수이므로 $a^3 > b^3$이고 $a > b$이다. 식을 정리하면

$$b^3 + b^2 = a^3 - a^2,$$

이고, 이는 위의 방정식에서 $x = b, y = a$로 둔 것이며 둘 다 양수이다. 따라서 $b < a < b + 1$이다.

? **생각해 보기** 정수라는 조건은 실제로 어디에서 쓰이는가?

바로 여기에서만 쓰인다. b와 $b + 1$ 사이에 엄격하게 들어가는 정수는 없다. 달리 말하면, a, b가 정수일 때 $a > b$이면 $a \geq b + 1$, 즉 $0 < b \leq a - 1$이 되고, 그러면 두 번째 결과에 의해 $b^3 + b^2 < a^3 - a^2$가 되어 방정식에 모순이다. 따라서 그러한 양의 정수 쌍은 존재하지 않는다. (실수에서는 해가 얼마든지 있다. 각 $x > 0$마다 $y \in (x, x+1)$인 해가 하나씩 있는데, 정수는 그저 이를 비껴갈 뿐이다.)

모든 정수 쌍

이제

$$m^3 - n^3 = m^2 + n^2. \qquad (*)$$

을 만족하는 모든 정수 m, n을 구하려 한다. 두 가지 관찰이 수고를 덜어 준다.

- (m, n)이 해이면 $(-n, -m)$도 해이다. 실제로 $(-n)^3 - (-m)^3 = m^3 - n^3$이고, 제곱의 합은 변하지 않는다.
- $(*)$의 우변은 음이 아니므로 $m^3 \geq n^3$, 즉 $m \geq n$이며, 등호는 $m^2 + n^2 = 0$, 즉 $m = n = 0$일 때만 성립한다.

둘 중 하나가 0인 경우. $n = 0$이면 $m^3 = m^2$이므로 $m = 0$ 또는 $m = 1$이다. $m = 0$이면 $-n^3 = n^2$이므로 $n = 0$ 또는 $n = -1$이다. 이로부터 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$을 얻는다(마지막 것은 대칭에 의한 $(1,0)$의 상이다).

둘 다 양수인 경우. 앞 부분에 의해 불가능하다.

둘 다 음수인 경우. 이때 $-n$과 $-m$은 둘 다 양수이고, $(-n,-m)$은 두 성분이 모두 양수인 해가 되므로 불가능하다.

부호가 서로 다른 경우. $m > n$이므로 $m > 0 > n$이다. $p \geq 1$로 $n = -p$라 두면 $(*)$는

$$m^3 + p^3 = m^2 + p^2, \qquad \text{즉} \qquad m^2(m-1) + p^2(p-1) = 0.$$

이 된다. 양의 정수에 대해서는 두 항이 모두 ≥ 0이므로 둘 다 0이어야 하고, 따라서 $m = p = 1$이다. 이로부터 $(1,-1)$을 얻으며, 실제로 $1-(-1) = 2 = 1+1$이다.

따라서 $m^3 - n^3 = m^2 + n^2$의 정수해 (m,n)은 정확히

$$(m,n) = (0,0), \quad (1,0), \quad (0,-1), \quad (1,-1).$$

이다. "쌍"이 자명한 쌍을 제외하는 뜻이라면 $(0,0)$을 뺀다.

검산

각 쌍은 손으로 확인할 수 있다. $(1,0)$이면 $1-0 = 1 = 1+0$, $(0,-1)$이면 $0-(-1) = 1 = 0+1$, $(1,-1)$이면 $2 = 2$이다. $|m|, |n| \leq 300$인 모든 경우를 컴퓨터로 탐색하면 정확히 이 네 해만 나온다. 첫 두 결과를 확인하기 위해 임의의 $x > 0$에 대해 $y^3 - y^2 = x^3 + x^2$를 수치적으로 풀어 보면 언제나 $x < y < x+1$이 나왔다. 예를 들어 $x = 1$이면 $y \approx 1.696$이다.

흔한 실수

- 마지막 부분에서 0과 음의 정수를 빠뜨리는 것. 해는 모두 바로 그곳에 있다.
- 두 정수 중 어느 것이 "앞"에 오는지 멋대로 가정하는 것. 여기서는 세제곱의 차가 양수이므로 더 큰 수가 앞에 와야 한다. 이 점을 밝혀 두어야 한다.
- $t \geq 1$에서 $t^3 - t^2$가 증가한다는 사실을 언급하지 않고 그저 "전개"만으로 두 번째 결과를 증명하는 것. $f(y) \geq f(x+1)$ 단계에는 이 사실이 필요하다.

STEP 너머

"실수해가 연속한 두 정수 사이에 엄격하게 갇혀 있으므로 정수해는 없다"는 논법은 디오판토스 방정식(Diophantine equation) 연구의 표준적인 도구이며, 정수에 대한 다항방정식

을 만나면 흔히 가장 먼저 시도해 볼 방법이다. 이렇게 해의 범위를 제한하는 것은 이러한 방정식 상당수가 유한 개의 해만 가진다는 것을 증명하는 방법이기도 하며, 그 해들은 유한한 탐색으로 찾을 수 있다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이런 종류의 정수론에 대한 훌륭한 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.