풀이

STEP III 2002, 문제 3

순수수학 • 곡선 그리기

STEP III 2002, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q3

핵심 아이디어

모든 것은 그래프의 모양에서 나온다. 그래프는 $x = b$에서 아래로 향하는 연직 접선(vertical tangent)을 가지고 출발하여, 하나뿐인 최솟값(minimum)까지 내려간 다음, 한없이 올라간다. 출발점의 높이와 최솟값의 높이를 알고 나면, $f(x) = c$의 해의 개수를 세는 일은 높이 c에 수평선을 긋고 그것이 곡선과 몇 번 만나는지 보는 것에 지나지 않는다. 두 개의 수치 방정식은 c^2의 값이 이 범위들의 경계와 내부에 놓이는 특수한 경우이다.

풀이

그래프

왼쪽 끝에서 $f(b) = a\sqrt{b}$이다. $x > b$에 대하여 미분(differentiation)하면

$$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-b}}.$$

$x \to b^+$일 때 둘째 항이 $-\infty$로 가므로, 곡선은 점 $(b, a\sqrt{b})$에서 곧장 아래로 향하며 출발한다(연직 접선).

두 제곱근이 모두 양수이므로

$$f'(x) < 0 \iff a\sqrt{x-b} < \sqrt{x} \iff a^2(x-b) < x \iff x < \frac{a^2 b}{a^2 - 1},$$

이며, 마지막 단계에서는 $a^2 - 1 > 0$을 이용하였다. 따라서 f는 $[b, x_0]$에서 순감소(strictly decreasing)하고 $[x_0, \infty)$에서 순증가(strictly increasing)한다. 여기서

$$x_0 = \frac{a^2 b}{a^2 - 1}.$$

최솟점에서 $x_0 - b = \dfrac{b}{a^2-1}$이므로

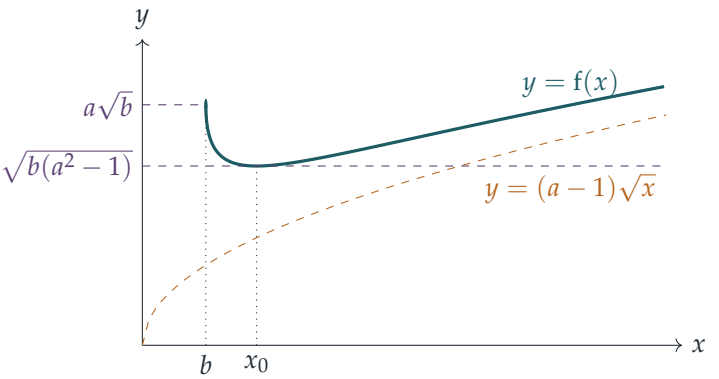
$$\mathrm{f}(x_0) = a\cdot\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{(a^2-1)\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} = \sqrt{b(a^2-1)}.$$

x가 클 때, 유리화(rationalising)하면

$$\mathrm{f}(x) = (a-1)\sqrt{x} + (\sqrt{x} - \sqrt{x-b}) = (a-1)\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}+\sqrt{x-b}},$$

이므로, $a > 1$이기 때문에 $\mathrm{f}(x) \to \infty$이고, 곡선은 $y = (a-1)\sqrt{x}$의 바로 위에 놓이며 $x \to \infty$일 때 이 곡선에 다가간다.

마지막으로, 출발점의 높이는 최솟값보다 크다. $a^2b > (a^2-1)b$이므로 $a\sqrt{b} > \sqrt{b(a^2-1)}$이다.



해의 개수 세기

최솟값을 $m = \sqrt{b(a^2-1)}$, 출발값을 $M = a\sqrt{b}$라 하면 $0 < m < M$이다. 두 단조(monotonic) 구간 각각에서 f는 연속(continuous)이고 순단조이므로, 치역의 각 값을 정확히 한 번씩 갖는다.

- $[b, x_0]$에서 f는 $[m, M]$의 각 값을 정확히 한 번씩 갖는다.
- $[x_0, \infty)$에서 f는 $[m, \infty)$의 각 값을 정확히 한 번씩 갖는다.

두 구간의 공통점은 x_0뿐이며, 이 점에서의 값은 m이다.

모든 $x \geq b$에 대하여 $\mathrm{f}(x) \geq m$이므로, $c < m$이면 방정식 $\mathrm{f}(x) = c$는 해를 갖지 않는다. $c > 0$일 때 이는 $c^2 < m^2$과 같으므로

$$c^2 < b(a^2-1) \quad \Longrightarrow \quad \text{해 없음},$$

이고, 이것이 보여야 할 내용이었다. 나머지 경우는 다음과 같다.

? 생각해 보기 왜 $c^2 = a^2b$일 때 해가 하나가 아니라 두 개인가?

$c = M$일 때 왼쪽 구간은 끝점 $x = b$ 자체를 해로 내놓는데, 정의역(domain)이 $x = b$를 포함하므로 이것은 엄연한 해이다. 오른쪽 구간은 더 멀리에서 또 하나의 해를 내놓는다. $c > M$일 때에만 왼쪽 구간에서 해가 나오지 않는다. 따라서 $c > 0$에 대하여

- $c^2 = b(a^2-1)$일 때(수평선이 최솟점에 접하므로 $x = x_0$뿐이다) 또는 $c^2 > a^2b$일 때(증가하는 가지만 그만큼 높이 올라간다) **해는 정확히 하나**이다.
- $b(a^2-1) < c^2 \le a^2b$일 때(각 가지에 하나씩) **해는 정확히 두 개**이다.

소문항 (i)

여기서는 $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$이므로 $b(a^2-1) = 16 = c^2$이다. 수평선이 최솟점에 접하므로 해는 정확히 하나이고,

$$x = x_0 = \frac{9 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}.$$

실제로 $3 \cdot \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$이다. 직접 풀어 보면, $3\sqrt{x} - 4 = \sqrt{x-2}$로 정리하고 제곱하여 $8x - 24\sqrt{x} + 18 = 0$, 즉 $(2\sqrt{x} - 3)^2 = 0$을 얻는다. 중근(repeated root)은 접함(tangency)의 대수적 표시이다.

소문항 (ii)

여기서는 $a = 3$, $b = 3$, $c = 5$이므로 $b(a^2-1) = 24 < 25 = c^2 < 27 = a^2b$이고, 해는 정확히 두 개이다. 해를 구하기 위해 방정식을 $3\sqrt{x} - 5 = \sqrt{x-3}$으로 쓰고 제곱하면

$$9x - 30\sqrt{x} + 25 = x - 3 \quad \Longrightarrow \quad 4x - 15\sqrt{x} + 14 = 0.$$

$\sqrt{x}$에 대한 이차방정식으로 보면 $(\sqrt{x} - 2)(4\sqrt{x} - 7) = 0$이므로 $\sqrt{x} = 2$ 또는 $\sqrt{x} = \frac{7}{4}$이고,

$$x = 4 \qquad \text{또는} \qquad x = \frac{49}{16}.$$

제곱하면 무연근(spurious roots)이 생길 수 있으므로 두 값을 원래 방정식에 대입하여 확인한다. 두 값 모두 $x \ge 3$을 만족하고($\frac{49}{16} = 3.0625$이므로),

$$3 \cdot 2 - \sqrt{1} = 5, \qquad 3 \cdot \frac{7}{4} - \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{21}{4} - \frac{1}{4} = 5.$$

따라서 둘 다 실제 해이며, 해가 두 개라는 결과와 일치한다. 예상대로 $x_0 = \frac{27}{8} = 3.375$의 양쪽에 하나씩 놓인다.

검산

- $a = \frac{3}{2}, b = 2$(그림의 경우)일 때 $x_0 = \frac{18}{5}$이고 $f(\frac{18}{5}) = \frac{3}{2}\sqrt{3.6} - \sqrt{1.6} = \sqrt{2.5} \approx 1.581$로, $f(2) = \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 2.121$보다 작다.
- 무작위로 고른 200개의 순서쌍 (a, b)에 대해 촘촘한 격자 위에서 f를 수치적으로 조사한 결과, x_0에서 최솟값이 $\sqrt{b(a^2-1)}$임이 확인되었고, $y = c$와의 교차 횟수를 세어 c^2의 세 범위에서 각각 0, 2, 1개의 해를 얻었다.
- (i)에서 중근이 나온 것은 c^2이 정확히 $b(a^2-1)$에 놓인다는 사실과 맞아떨어진다. (ii)에서 $c^2 = 25$는 24와 27 사이에 엄격히 놓이며, 실제로 두 근을 찾았다.

흔한 실수

- $c^2 = a^2b$를 "해가 하나" 경우에 넣는 것. $x = b$는 정의역에 속하므로 해로 센다.
- 제곱한 뒤 확인하지 않는 것. 여기서는 두 근이 모두 살아남지만, 각각에 대해 $3\sqrt{x} - 5 \geq 0$과 $x \geq 3$을 반드시 확인해야 한다.
- $f \to \infty$가 되게 하는 것이 $a > 1$이라는 조건임을 잊는 것. $a \leq 1$이면 최솟값이 없고 그림이 완전히 달라진다.

STEP 너머

해의 개수를 세는 논증은 해석학의 두 가지 사실에 기대고 있다. 구간에서 연속인 함수는 양 끝값 사이의 모든 값을 갖는다는 것(중간값 정리(intermediate value theorem))과, 순단조함수는 각 값을 많아야 한 번 갖는다는 것이다. 이 둘을 합치면 그림이 증명으로 바뀐다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 두 사실을 꼼꼼하게 전개하고, 왜 연속성이 바로 필요한 가정인지를 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.