풀이

STEP III 2002, 문제 2

순수수학 • 역탄젠트 급수

> **STEP III 2002, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q2

핵심 아이디어

첫 번째 결과는 탄젠트 덧셈정리(tangent addition formula)를 모양만 바꾼 것이다. 실제로 해야 할 일은 양변이 tan가 일대일(one-to-one)인 같은 구간 안의 각이라는 것을 확인하는 것뿐이다. 이 공식을 얻고 나면, 귀납법(induction)은 공식을 한 번 적용하고 인수분해를 조금 하는 것으로 끝난다. 마지막 합에서는 $r^2 - r + 1$이 $r^2 + r + 1$에서 r을 하나 옮긴 것에 지나지 않는다는 점을 알아차리는 것이 요령이다. 따라서 새 급수(series)는 기존 급수의 맨 앞에 항이 하나 더 붙은 것이다.

풀이

덧셈정리

$A = \arctan a$, $B = \arctan b$라 하자. 그러면 $\tan A = a$, $\tan B = b$이고

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{a + b}{1 - ab},$$

이며, $ab < 1$이므로 이 식은 의미가 있다. 이로써 $A + B$와 $\arctan(\frac{a+b}{1-ab})$의 탄젠트 값이 같음을 알 수 있다. 그러나 tan는 주기가 π이므로, 이것만으로 두 값이 같다고 할 수는 없다. 따라서 두 각이 모두 tan가 일대일인 한 구간 안에 있어야 한다.

> ? **생각해 보기** 왜 $\tan(A + B) = \frac{a+b}{1-ab}$만으로 증명이 끝나지 않는가?

증명이 끝나지 않는 까닭은 arctan의 값이 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 안에서만 나오기 때문이다. $A + B$도 이 구간 안에 있음을 확인해야 한다.

▶ $0 < a < 1$이고 arctan는 증가함수이므로 $0 < A < \frac{\pi}{4}$이다. 마찬가지로 $0 < B < \frac{\pi}{4}$이므

로 $0 < A + B < \frac{\pi}{2}$이다.

- $a + b > 0$이고 $1 - ab > 0$이므로 분수 $\frac{a+b}{1-ab}$는 양수이다. 따라서 그 arctan 값도 $(0, \frac{\pi}{2})$ 안에 있다.

함수 tan는 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 순증가(strictly increasing)하므로 일대일이다. 따라서 이 구간에서 탄젠트 값이 같은 두 각은 서로 같고, 다음을 얻는다.

$$\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right). \qquad \checkmark$$

귀납법

$S_n = \sum_{r=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{r^2+r+1}\right)$이라 하자. 보여야 할 것은 $S_n = \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)$이다.

기저 단계(*base case*). $n = 1$일 때 양변은 모두 $\arctan\frac{1}{3}$이다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $n \geq 1$에 대하여 $S_n = \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)$이라 가정하자. 다음 항에서는

$$(n+1)^2 + (n+1) + 1 = n^2 + 3n + 3,$$

이므로

$$S_{n+1} = \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right).$$

두 인수 모두 0보다 크고 1보다 작으므로, $a = \frac{n}{n+2}$, $b = \frac{1}{n^2+3n+3}$으로 두고 덧셈정리를 적용할 수 있다. $\frac{a+b}{1-ab}$의 분자와 분모에 $(n+2)(n^2+3n+3)$을 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{1-ab} &= \frac{n(n^2+3n+3)+(n+2)}{(n+2)(n^2+3n+3)-n} \\ &= \frac{n^3+3n^2+4n+2}{n^3+5n^2+8n+6}.\end{aligned}$$

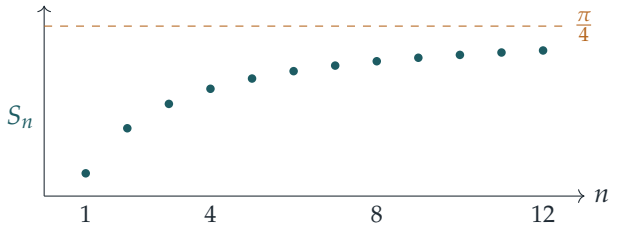
두 삼차식은 모두 음의 정수에서 0이 된다. 분자는 $n = -1$에서, 분모는 $n = -3$에서 0이다. 인수분해하면

$$\frac{a+b}{1-ab} = \frac{(n+1)(n^2+2n+2)}{(n+3)(n^2+2n+2)} = \frac{n+1}{n+3},$$

이며, $n^2 + 2n + 2 = (n+1)^2 + 1 > 0$이므로 약분할 수 있다. 따라서 $S_{n+1} = \arctan\left(\frac{n+1}{(n+1)+2}\right)$이고, 이는 $n+1$에 대한 명제이다. 수학적 귀납법에 의하여 모든 $n \geq 1$에 대하여 결과가 성립한다. ✓

무한급수의 합. $n \to \infty$일 때 $\frac{n}{n+2} \to 1$이다. arctan는 연속(continuous)이므로

$$\sum_{r=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{r^2+r+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$



마지막 합

$s = r - 1$로 놓자. 그러면

$$r^2 - r + 1 = (s+1)^2 - (s+1) + 1 = s^2 + s + 1.$$

r이 $1, 2, 3, \ldots$을 지나갈 때 s는 $0, 1, 2, \ldots$을 지나간다. $s = 0$인 항은 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$이고, 나머지 항들($s \geq 1$)은 정확히 방금 합을 구한 급수를 이룬다. 따라서

$$\sum_{r=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{r^2 - r + 1}\right) = \arctan 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{s^2 + s + 1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \qquad \checkmark$$

첫 번째 급수가 수렴(converge)하므로 두 번째 급수도 수렴하고, 따라서 첫 항을 따로 떼어내는 것은 정당하다.

검산

- $n = 2$일 때: $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$의 탄젠트 값은 $\frac{10/21}{20/21} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$로, 공식이 예측하는 값과 같다.
- 수치적으로 $S_{2000} \approx 0.784898$이고, $\arctan\frac{2000}{2002}$는 이 값과 10^{-12} 이내로 일치하며, $\frac{\pi}{4} \approx 0.785398$이다.
- 두 번째 급수를 $r = 10^6$까지 더하면 $1.5707953\ldots$이 되어 $\frac{\pi}{2}$와의 차이가 10^{-6} 이내이다. 이는 n개 항까지 더한 뒤의 차이 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{n-1}{n+1} = \arctan\frac{1}{n} \approx \frac{1}{n}$과 들어맞는다.

흔한 실수

- "양변의 tan 값이 같다"에서 멈추는 것. 범위에 대한 논증이 없으면 증명은 불완전하다. (예를 들어 $a = b = 2$이면 공식이 성립하지 않는다. 좌변은 양수이지만 $\arctan(-\frac{4}{3})$은 음수이다.)
- 귀납 단계에서 공식을 쓰기 전에 두 인수가 모두 $(0, 1)$ 안에 있는지 확인하는 것을 잊는 것.

- 마지막 합을 또다시 $\frac{\pi}{4}$로 쓰는 것. $r \mapsto r-1$로 옮기면 맨 앞에 $\arctan 1$이라는 항이 하나 더 붙는다.

STEP 너머

귀납법보다 더 깔끔한 방법이 있다. $\frac{1}{r^2+r+1} = \frac{(r+1)-r}{1+r(r+1)}$이므로 각 항은 $\arctan(r+1) - \arctan r$이다. 따라서 합은 **망원급수**(*telescoping*)처럼 소거되어 $\arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}$가 되고, 이는 뺄셈정리에 의하여 $\arctan \frac{n}{n+2}$이다. 망원급수 구조를 알아보는 것과 부분합의 극한을 연속성으로 정당화하는 것은 대학 첫 해석학(analysis) 강의에서 늘 쓰는 도구이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 급수와 연속성을 꼼꼼하게 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 종류의 STEP 스타일 연습 문제가 더 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.