풀이

STEP III 2002, 문제 12

확률과 통계 • 조건부를 이용한 기댓값

> **STEP III 2002, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q12

핵심 아이디어

게임이 어떻게 **시작하는지**에 따라 조건을 나눈다(condition). 모든 게임은 H, TH, TT 중 하나로 시작한다. 앞의 두 경우에는 쓸모 있는 진전이 전혀 없으므로(뒷면의 연속이 끊겼으므로) 게임은 그냥 처음부터 다시 시작하고, 남은 길이의 기댓값(expectation)은 다시 E이다. 이러한 "재생(renewal)"으로부터 E에 대한 일차방정식을 얻고, 이를 풀 수 있다. 같은 아이디어, 즉 첫 앞면이 언제 나오는지로 경우를 나누는 방법으로 뒷면 r번의 경우도 다룰 수 있다.

풀이

이 풀이 전체에서 p는 앞면이 나올 확률, $q = 1 - p$는 뒷면이 나올 확률이며, 각 던지기는 독립(independent)이다. $0 < p < 1$이라 가정하므로 게임은 확률 1로 끝나고, 아래의 모든 기댓값은 유한하다.

E에 대한 방정식의 설명

처음 한두 번의 던지기를 살펴보자. 다음 중 정확히 하나가 일어난다.

- **처음에 H** (확률 p). 한 번 던졌고, 진행 중인 뒷면의 연속은 없다. 각 던지기가 독립이므로 게임의 나머지 부분은 전체 게임의 새로운 복사본이며, 그 길이의 기댓값은 E이다. 전체 길이의 기댓값: $1 + E$.
- **T 다음 H** (확률 qp). 두 번 던졌고, 이번에도 앞면이 뒷면의 연속을 지워 버렸으므로 게임은 다시 시작한다. 전체 길이의 기댓값: $2 + E$.
- **T 다음 T** (확률 q^2). 게임은 정확히 2번 던진 뒤 끝난다.

이 세 경우는 서로 배반이고 모든 경우를 망라한다(확률의 합이 $p+qp+q^2 = p+q = 1$이다). 전체 기댓값의 법칙(law of total expectation)에 의해

$$E = p(1+E) + (1-p)p(2+E) + 2(1-p)^2,$$

이고, 이것이 주어진 방정식이다.

E 구하기

E가 들어 있는 항을 모으면

$$E\,(1-p-qp) = p + 2qp + 2q^2.$$

좌변에서 $1-p-qp = q-qp = q(1-p) = q^2$이다. 우변에서 $p+2q(p+q) = p+2q = 1+q$이다. $q \neq 0$이므로

$$E = \frac{1+q}{q^2} = \frac{2-p}{(1-p)^2}.$$

상금의 기댓값

W를 앞면이 나오는 횟수의 기댓값, 즉 파운드 단위 상금의 기댓값이라 하자. 같은 세 경우를 이용한다. H 다음에는 £1을 얻고 게임이 다시 시작한다. TH 다음에도 £1을 얻고 게임이 다시 시작한다. TT 다음에는 아무것도 얻지 못하고 게임이 끝난다. 따라서

$$W = p(1+W) + qp(1+W) + q^2 \cdot 0.$$

? **생각해 보기** TH의 경우에 왜 W가 아니라 $1+W$인가?

그 경우 두 번째 던지기는 앞면**이므로**, 게임이 다시 시작하기 전에 £1을 번다. 이것을 빠뜨리는 것이 여기서 가장 틀리기 쉬운 부분이다.

항을 정리하면 $W(1-p-qp) = p(1+q)$이므로 $Wq^2 = p(1+q)$이고

$$W = \frac{p(1+q)}{q^2} = \frac{p(2-p)}{(1-p)^2} \text{ 파운드.}$$

$W = pE$임에 주목하자. 게임이 멈추는 시점이 던지기 결과에 따라 달라지는데도, 평균적으로 던지기 중 비율 p만큼이 앞면이다.

뒷면이 r번 연속으로 나오는 게임

이제 E를 뒷면이 r번 연속으로 나오면 멈추는 게임에서 던지는 횟수의 기댓값이라 하자. 첫 앞면에 따라 조건을 나눈다. 처음 r번이 모두 뒷면이거나, 또는 $0 \leq j \leq r-1$인 어떤 j에 대하여 첫 앞면이 $j+1$번째 던지기에서 나온다.

- **뒷면 j번 다음 앞면** (확률 $q^j p$). $j+1$번 던졌고, 뒷면의 연속이 끊겼으므로 게임은 다시 시작한다. 전체 길이의 기댓값: $j+1+E$.
- **뒷면 r번** (확률 q^r). 게임은 정확히 r번 던진 뒤 끝난다.

따라서

$$E = \sum_{j=0}^{r-1} q^j p\,(j+1+E) + rq^r.$$

$1-q=p$이므로 우변에서 E의 계수는 $p\sum_{j=0}^{r-1} q^j = p\cdot\dfrac{1-q^r}{1-q} = 1-q^r$이다. 이것을 좌변으로 옮기면

$$q^r E = p\sum_{j=0}^{r-1}(j+1)q^j + rq^r. \qquad (*)$$

생각해 보기 공식집 없이 $\sum(j+1)q^j$를 어떻게 계산할까?

$S=\sum_{j=0}^{r-1}(j+1)q^j = 1+2q+3q^2+\cdots+rq^{r-1}$이라 쓰고, 여기서 $qS = q+2q^2+\cdots+(r-1)q^{r-1}+rq^r$를 빼면

$$(1-q)S = 1+q+q^2+\cdots+q^{r-1}-rq^r = \frac{1-q^r}{p} - rq^r.$$

그러므로 $pS = \dfrac{1-q^r}{p} - rq^r$이고, 이를 $(*)$에 대입하면 rq^r 항들이 소거된다.

$$q^r E = \frac{1-q^r}{p} - rq^r + rq^r = \frac{1-q^r}{p}.$$

따라서

$$E = \frac{1-q^r}{pq^r},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. $r=2$이면 이 값은 $\dfrac{(1-q)(1+q)}{pq^2} = \dfrac{1+q}{q^2}$이 되어 첫 번째 게임의 결과와 일치한다.

검산

- 공정한 동전, 즉 $p=q=\frac{1}{2}$인 경우: 첫 번째 게임은 평균 $E=\frac{3/2}{1/4}=6$번 계속되고 상금은 $W=$£3으로, 당연히 그래야 하듯 E의 절반이다.
- $r=1$: 게임은 첫 뒷면에서 멈추므로 길이는 평균이 $1/q$인 기하분포(geometric distribution)를 따른다. 공식은 $\dfrac{1-q}{pq} = \dfrac{1}{q}$을 준다.

- $q \to 0$일 때(거의 모든 던지기가 앞면일 때) E와 W는 모두 한없이 커지며, 당연히 그래야 한다.
- $r = 1, \ldots, 7$과 여러 p 값에 대하여 "현재 뒷면이 k번 연속된 상태"들로 이루어진 연쇄를 풀어, 이 공식들을 분수로 정확히 확인하였다. $p = 0.4$로 2×10^5번의 게임을 시뮬레이션한 결과, $r = 2$일 때 평균 4.438번 던지기(이론값 4.444)와 상금 £1.772(이론값 £1.778)를, $r = 3$일 때 9.076번 던지기(이론값 9.074)를 얻었다.

흔한 실수

- 상금에 대한 방정식에서 $qp(1 + W)$ 대신 $qp\,W$로 쓰는 것. 이렇게 하면 틀린 답 p/q^2을 얻는다.
- 첫 번째 던지기만으로 조건을 나누는 것. T 한 번 다음에는 연속의 뒷면 하나가 이미 쌓여 있으므로 게임이 다시 시작하지 **않는다**. 주어진 방정식이 두 번의 던지기를 내다보는 이유가 이것이다.

STEP 너머

"앞면이 한 번 나오면 그 이후는 처음과 정확히 같아 보인다"는 논증은 마르코프 연쇄(Markov chain)에 대한 **재생** 방법 또는 **첫 단계 분석**(*first-step analysis*)이며, 일반적으로 도달 시간(hitting time)의 기댓값은 이 방법으로 계산한다. $W = pE$라는 깔끔한 사실은 왈드 항등식(Wald's identity)의 한 예이다. 서로 독립이고 동일한 분포를 따르는(independent, identically distributed) 항들을 무작위 개수 N개 더한 합의 기댓값은, N이 정지 시간(stopping time)이라면 $\mathbb{E}[N]$에 한 항의 평균을 곱한 값과 같다. 두 가지 모두 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서), 또는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문서)에서 읽어 볼 수 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.