풀이

STEP III 2002, 문제 11

역학 • 벽과의 비스듬한 충돌

STEP III 2002, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q11

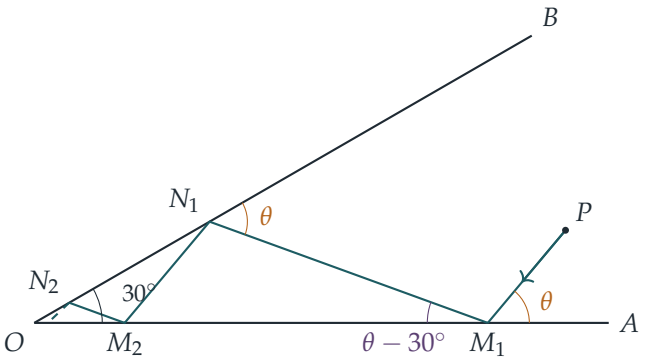
이 문제는 *Beyond STEP*의 10.5 절 **유한한 시간 동안 무한 번 튀어 오르기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/zeno-wedge.html

핵심 아이디어

매끄러운 벽에서 충격량(impulse)은 벽에 수직이다. 따라서 벽을 따르는 속도 성분은 그대로 남고, 수직 성분만 e배가 된다. 이 사실을 삼각형 OM_1N_1의 각과 결합하면 첫 번째 부분은 하나의 삼각방정식으로 정리된다. 두 번째 부분에서는 매번 튕길 때마다 운동이 더 작은 규모로 되풀이된다. 각 구간의 길이는 짧아지지만 입자의 속력도 줄어들므로, 거리가 아니라 시간을 더해야 한다. 그 합은 등비급수(geometric series)이다.

풀이

입자를 매끄러운 수평면 위에서 움직이는 점으로 모형화한다. 따라서 충돌과 충돌 사이에는 일정한 속력으로 직선 운동을 한다. 벽은 매끄럽고, 각 충돌은 반발계수(coefficient of restitution) e인 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)을 따른다.



e와 v_1/u_1 구하기

각 $PM_1A = \theta$이므로, 입자는 벽과 각 θ를 이루며 O 쪽으로 움직이면서 M_1에 도달한다. 충돌 직전의 속도 성분은

$$u_1 \cos\theta \text{ 벽을 따라 } (O \text{ 쪽으로}), \qquad u_1 \sin\theta \text{ 벽에 수직 (벽 쪽으로)}.$$

이다. 벽이 매끄러우므로 입자가 받는 충격량은 OA에 수직이다. 따라서

$$\text{벽 방향: } u_1 \cos\theta \text{ (변하지 않음)},$$
$$\text{수직 방향: } e\,u_1 \sin\theta \text{ (방향이 반대가 되고 } e\text{배가 됨)}.$$

그러므로 입자는 여전히 O 쪽으로 움직이며, 벽과 각 φ를 이루고 M_1을 떠난다. 여기서

$$\tan\varphi = \frac{e\,u_1 \sin\theta}{u_1 \cos\theta} = e\tan\theta, \qquad v_1 \cos\varphi = u_1 \cos\theta. \tag{$*$}$$

이다.

다음으로 삼각형 OM_1N_1의 기하로부터 φ를 구한다. 점 O, N_1, B는 한 직선 위에 있고 각 $M_1N_1B = \theta$이므로, 각 $ON_1M_1 = 180° - \theta$이다. O에서의 각은 $30°$이므로

$$\varphi = \angle OM_1N_1 = 180° - 30° - (180° - \theta) = \theta - 30°.$$

이다. φ가 양수이려면 $\theta > 30°$이어야 하며, 이 배치는 이를 암묵적으로 가정한다. 그러면 $(*)$에서

$$\boxed{e = \frac{\tan(\theta - 30°)}{\tan\theta}}$$

이고

$$\boxed{\frac{v_1}{u_1} = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta - 30°)} = \frac{2}{\sqrt{3} + \tan\theta}},$$

이다. 마지막 꼴은 $\cos(\theta - 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$로 전개하여 얻는다. 원한다면 $e = \dfrac{\sqrt{3}\tan\theta - 1}{\tan\theta\,(\sqrt{3} + \tan\theta)}$로 써도 된다. $0 < \theta - 30° < \theta < 90°$이므로 문제에서 요구하는 대로 $0 < e < 1$을 얻는다.

유한한 시간 안에 O에 도달하기

N_1에서 입자는 벽 OB와 각 θ를 이루며 O 쪽으로 움직이면서 도달한다(각 $M_1N_1B = \theta$이므로). 이는 두 벽의 역할만 바뀌었을 뿐 M_1에서의 상황과 정확히 같다. 따라서 같은 계산이 적용된다. 입자는 N_1O와 각 $\theta - 30^\circ$를 이루며 튕겨 나가고, 속력은

$$r = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta - 30^\circ)}.$$

배가 된다.

생각해 보기 입자가 M_2에 다시 각 θ로 도달하여 이 패턴이 정말로 되풀이되는가?

그렇다. 삼각형 ON_1M_2에서 O에서의 각은 30°이고 N_1에서의 각은 $\theta - 30^\circ$이다. 따라서 각 $OM_2N_1 = 180^\circ - \theta$이고, 이는 각 $N_1M_2A = \theta$임을 뜻한다. 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 충돌은 벽과 각 θ를 이루며 일어난다. 모든 구간은 벽과 각 $\theta - 30^\circ$를 이루며 벽을 떠난다. 그리고 모든 삼각형 OM_nN_n, ON_nM_{n+1}은 각이 30°, $\theta - 30^\circ$, $180^\circ - \theta$이므로 모두 닮음(similar)이다.

길이. 삼각형 OM_1N_1에서 사인법칙(sine rule)에 의해

$$\frac{ON_1}{\sin(\theta - 30^\circ)} = \frac{OM_1}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{M_1N_1}{\sin 30^\circ}.$$

이다. 따라서 새 삼각형은 각각 이전 삼각형을

$$k = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{\sin(\theta - 30^\circ)}{\sin\theta}.$$

배로 축소한 것이다. 구간 M_1N_1, N_1M_2, $M_2N_2, \ldots$을 차례로 구간 $1, 2, 3, \ldots$이라 하자. 구간 n의 길이는 $\ell_1 k^{n-1}$이며, 여기서 $\ell_1 = M_1N_1 = \dfrac{OM_1}{2\sin\theta}$이다.

속력. 구간 n은 일정한 속력 $v_1 r^{n-1}$로 움직인다.

시간. 따라서 구간 n에 걸리는 시간은

$$\tau_n = \frac{\ell_1 k^{n-1}}{v_1 r^{n-1}} = \frac{\ell_1}{v_1} q^{n-1}, \qquad q = \frac{k}{r} = \frac{\sin(\theta - 30^\circ)\cos(\theta - 30^\circ)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(2\theta - 60^\circ)}{\sin 2\theta}.$$

이다.

생각해 보기 구간의 길이는 등비적으로 줄어들지만 입자의 속력도 줄어든다. 왜 길이만으로는 문제가 해결되지 않는가?

더해야 하는 것은 시간이며, 시간의 비 q는 구간이 줄어드는 정도(k)와 입자가 느려지는 정도(r)를 비교한다. 우리에게는 $q < 1$이 필요하다. 이제 $30^\circ < \theta < 60^\circ$라 하자. 그러면

$$0^\circ < 2\theta - 60^\circ < 60^\circ \;\Rightarrow\; \sin(2\theta - 60^\circ) < \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 60^\circ < 2\theta < 120^\circ \;\Rightarrow\; \sin 2\theta > \tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

이므로 $0 < q < 1$이다. 그러면 전체 시간은 수렴(convergent)하는 등비급수이다.

$$T = \frac{PM_1}{u_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell_1}{v_1} q^{n-1} = \frac{PM_1}{u_1} + \frac{\ell_1}{v_1(1-q)}.$$

이 값은 유한하다. 간단히 하기 위해 $\sin 2\theta - \sin(2\theta - 60^\circ) = 2\cos(2\theta - 30^\circ)\sin 30^\circ$를 이용하면 $1 - q = \dfrac{\cos(2\theta - 30^\circ)}{\sin 2\theta}$를 얻는다. 그러면 M_1 이후의 시간은

$$\frac{\ell_1}{v_1(1-q)} = \frac{OM_1 \cos(\theta - 30^\circ)}{u_1 \cos(2\theta - 30^\circ)},$$

이고, 이는 $30^\circ < \theta < 60^\circ$에서 양수이며 유한하다.

마지막으로, 입자는 실제로 O에 도달한다. n번째 충돌 후 O로부터의 거리는 $OM_1 k^n \to 0$이다. $0 < k < 1$이기 때문이다. 한 구간 동안 O로부터의 거리는 그 구간의 두 끝점의 거리 중 큰 값 이하이다. 따라서 $t \to T$일 때 입자와 O 사이의 거리는 0으로 수렴한다. 즉 입자는 무한히 많은 충돌을 거친 뒤 유한한 시간 T에 O에 도달한다. ■

검산

- $\theta = 45^\circ$일 때: $e = \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268$, $v_1/u_1 = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$이고 $q = \sin 30^\circ / \sin 90^\circ = \frac{1}{2}$이므로, 각 구간은 이전 구간의 절반만큼 시간이 걸린다. $OM_1 = u_1 = 1$로 두면 M_1에서 O까지의 시간은 $\cos 15^\circ / \cos 60^\circ = 2\cos 15^\circ \approx 1.932$이다. 충돌을 한 단계씩 시뮬레이션하면(6o번 튕김) 1.931852를 얻어 일치한다.
- $\theta = 60^\circ$일 때: $q = 1$이므로 모든 구간에 같은 시간이 걸리고 전체 시간은 무한하다. $\theta > 60^\circ$이면 $q > 1$이다. 따라서 60°가 정확히 경계이며, T에 대한 식은 그곳에서 $\cos(2\theta - 30^\circ) = \cos 90^\circ = 0$ 때문에 발산한다.
- $\theta \to 30^{\circ+}$일 때 $e \to 0$이다. 예상대로 입자는 거의 튕기지 않고 거의 곧장 O로 미끄러진다.

흔한 실수

- 삼각형을 잘못 보는 것: 각 M_1N_1B는 N_1에서의 **외각**이므로 내각은 $180^\circ - \theta$이고, M_1에서 튕겨 나가는 각은 $\theta + 30^\circ$가 아니라 $\theta - 30^\circ$이다.
- 거리 $OM_n \to 0$이라는 이유만으로 입자가 O에 도달한다고 주장하는 것. 무한히 많은 구간에 대해서는 **시간**의 급수가 수렴해야 하며, 입자는 충돌할 때마다 느려진다.
- 충돌 시 접선 성분의 방향을 뒤집는 것. 매끄러운 벽에서는 법선 성분만 바뀐다.

STEP 너머

유한한 시간 안에 무한히 많은 충돌이 일어나는 것을 **제논 현상**(Zeno behaviour)이라 한다. 익숙한 예는 $e < 1$로 바닥에서 튀는 공이며, 여기서는 쐐기가 바닥의 역할을 한다. 매끄러운 운동과 갑작스러운 도약이 섞인 "하이브리드" 시스템을 연구하는 수학자들은 제논 시간 이후에 무슨 일이 일어나는지 정해야 한다. 입자성 물질(granular materials)에서는 **비탄성 붕괴**(inelastic collapse)라 불리는 같은 현상이 시뮬레이션에서 실제로 큰 골칫거리가 된다. 대학 1학년 수준에서 충돌과 충격량을 꼼꼼히 다룬 책으로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.