풀이

STEP III 2002, 문제 10

역학 • 마찰이 있는 회전

STEP III 2002, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q10

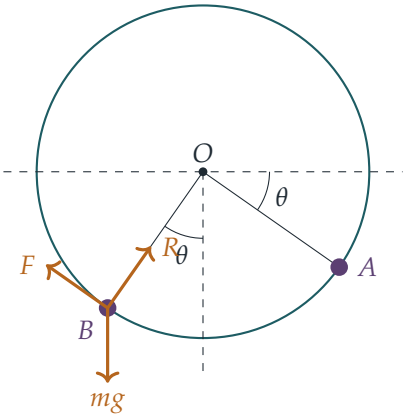
핵심 아이디어

두 번째 입자가 미끄러지지 않는 동안에는 원기둥과 함께 움직이므로, 전체 계는 고정 축(fixed axis)을 중심으로 회전하는 하나의 강체(rigid body)이다. 즉 반지름 a인 곳에 같은 질량 두 개가 4분의 1바퀴 떨어져 붙어 있는 것이다. 그러면 에너지(또는 축에 대한 모멘트(moment))로 운동을 한 줄에 구할 수 있다. 미끄러짐(slipping)이 언제 시작되는지 알아내려면, 고정되지 않은 입자만 따로 보고 면을 따르는 방향과 면에 수직인 방향으로 뉴턴 제2법칙(Newton's second law)을 써서 그 입자에 필요한 마찰력(friction) F와 수직항력(normal reaction) R을 구한다. 입자는 F가 처음으로 μR에 이를 때 미끄러진다.

풀이

상황 설정

두 입자를 가벼운 원기둥 위의 질점(point mass)으로 모형화하고, 축은 매끄럽다고 하자. 축을 O, 고정된 입자를 A, 고정되지 않은 입자를 B라 하자. 정지 상태에서 놓으면 A가 떨어지므로, 원기둥이 (그림에서 시계 방향으로) 돌면서 B를 A의 반대쪽 옆면을 따라 위로 들어올린다. θ만큼 회전한 뒤 OA는 수평선 아래로 각 θ를 이루고, OB는 반대쪽에서 연직 아래 방향과 각 θ를 이룬다.



운동 방정식

B가 미끄러지지 않는 동안 두 입자는 모두 각속도(angular speed) $\dot\theta$로 반지름 a인 원 위를 움직이고, 원기둥 자체는 질량이 없다. O의 높이를 위치 에너지(potential energy)의 기준 0으로 잡으면 A의 높이는 $-a\sin\theta$, B의 높이는 $-a\cos\theta$이다. 계는 $\theta = 0$에서 정지 상태로 출발하고, 매끄러운 축은 일을 하지 않으며, B와 원기둥 사이의 마찰력은 상대 운동이 없으므로 알짜 일을 하지 않는다. 따라서 에너지가 보존된다.

$$2\cdot\tfrac{1}{2}ma^2\dot\theta^2 - mga\sin\theta - mga\cos\theta = -mga,$$

즉

$$\dot\theta^2 = \frac{g}{a}(\sin\theta + \cos\theta - 1). \qquad (*)$$

이것을 시간에 대해 미분하고 $2\dot\theta$(운동이 시작된 뒤에는 0이 아니다)로 나누면

$$\ddot\theta = \frac{g}{2a}(\cos\theta - \sin\theta),$$

을 얻으며, 이것이 구하려던 식이다. O에 대한 모멘트를 써도 같은 결과를 얻는다. A의 무게는 회전 방향으로 $mga\cos\theta$의 모멘트를, B의 무게는 그 반대 방향으로 $mga\sin\theta$의 모멘트를 가지며, 관성 모멘트(moment of inertia)는 $2ma^2$이다.

B는 언제 미끄러지는가?

이제 B만 따로 보자. B에 작용하는 힘은 무게 mg, O를 향하는 수직항력 R, 그리고 면을 따르는 마찰력 F이다. 마찰력은 B의 운동 방향(옆면을 따라 위쪽)을 양으로 잡는다. B는 반지름 a인 원 위를 움직이므로 O를 향하는 가속도 $a\dot\theta^2$와 운동 방향의 가속도 $a\ddot\theta$를 가진다. 무게는 O에서 곧바로 멀어지는 방향으로 성분 $mg\cos\theta$를, 운동 반대 방향으로 성분 $mg\sin\theta$를 가진다. 따라서

$$\text{중심 방향}O: \quad R - mg\cos\theta = ma\dot\theta^2,$$
$$\text{운동 방향}: \quad F - mg\sin\theta = ma\ddot\theta.$$

$(*)$와 운동 방정식을 이용하면

$$R = mg\cos\theta + mg(\sin\theta + \cos\theta - 1) = mg\,(2\cos\theta + \sin\theta - 1),$$
$$F = mg\sin\theta + \tfrac{1}{2}mg(\cos\theta - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}mg\,(\sin\theta + \cos\theta).$$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$에서 둘 다 양수이다. ($2\cos\theta \ge 1$을 이용하면 $0 < \theta \le \frac{\pi}{3}$에서 $2\cos\theta + \sin\theta - 1 \ge \sin\theta > 0$이므로 $R > 0$이고, $\theta = 0$에서는 $R = mg$이다.) 그러므로 B는 접촉을 유지하고, 마찰력은 입자를 옆면을 따라 위로 민다. 입자는 $F \le \mu R$인 동안, 즉

$$\rho(\theta) = \frac{F}{R} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2(2\cos\theta + \sin\theta - 1)} \le \mu.$$

인 동안 미끄러지지 않는다. $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$인 $\theta = \frac{\pi}{3}$에서

$$\rho\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} = \mu.$$

생각해 보기 입자가 이보다 먼저 미끄러지기 시작할 수 없는 이유는 무엇인가?

모든 $0 \le \theta < \frac{\pi}{3}$에 대해 $\rho(\theta) < \mu$임을 보여야 한다. $N = \sin\theta + \cos\theta$, $D = 2\cos\theta + \sin\theta - 1$이라 하면

$$\begin{aligned} N'D - ND' &= (\cos\theta - \sin\theta)(2\cos\theta + \sin\theta - 1) - (\sin\theta + \cos\theta)(\cos\theta - 2\sin\theta) \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta + \sin\theta - \cos\theta = 1 + \sin\theta - \cos\theta, \end{aligned}$$

이고, 이는 $0 < \theta < \pi$에서 양수이다. $[0, \frac{\pi}{3}]$에서 $D > 0$이므로 그 구간에서 $\rho' = (N'D - ND')/(2D^2) > 0$이고, 따라서 ρ는 $\rho(0) = \frac{1}{2}$에서부터 순증가한다. 그러므로 ρ는 $\theta = \frac{\pi}{3}$에서 정확히 μ에 이를 때까지 μ보다 작다. 또한 $(*)$에 의해 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $\dot\theta^2 > 0$이므로, 원기둥은 실제로 계속 회전하여 이 각도에 도달한다.

따라서 두 번째 입자는 원기둥이 $60°$만큼 회전했을 때 미끄러지기 시작하며, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- $\theta = 0$에서: B는 맨 아래에 정지해 있는데도 $F = \frac{1}{2}mg \ne 0$이다. 이는 옳다. A의 무게가 원기둥을 돌리려 하므로, 마찰력이 B를 함께 가속시켜야 하기 때문이다. 실제로 그 순간 $F = ma\ddot\theta = \frac{1}{2}mg$이고, B가 아직 속력이 없으므로 $R = mg$이다.
- $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 $\ddot\theta = 0$이고 각속도는 최대이다. 두 무게가 O에 대해 균형을 이룰 때 기대되는 결과이다.

- 수치적으로 운동 방정식을 적분하고 B의 가속도로부터 접촉력을 직접 계산하면 R와 F의 공식이 그대로 재현되며, F/R는 60.00°에서 처음으로 $(3+\sqrt{3})/6 \approx 0.7887$에 이른다.

흔한 실수

- 원기둥의 관성 모멘트를 포함하는 것: 원기둥은 가벼우므로 두 입자만이 $2ma^2$를 기여한다.
- B의 접선 가속도(tangential acceleration) $a\ddot{\theta}$를 빠뜨리는 것: 그러면 $F = mg\sin\theta$가 되어 틀린 각도를 얻는다.
- 60°에서 $F = \mu R$임만 확인하고, 그 전에는 F/R가 더 작았음을 보이지 않는 것.

STEP 너머

이것은 자유도(degree of freedom)가 1인 계이다. 구속 조건(constraint)(미끄러지지 않음)을 부과하고 나면 좌표 하나 θ가 모든 것을 기술하고, 에너지로 운동을 바로 구할 수 있다. 구속력(constraint force)은 그다음에 구하며, 구속 조건에 필요한 힘이 면이 제공할 수 있는 힘을 넘어설 때 구속 조건이 깨진다. 이는 입자가 구면에서 떨어져 나가는 문제와 같은 논리이며, 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서는 라그랑주 승수(Lagrange multiplier)를 써서 이를 체계화한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 강체의 회전과 구속력을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.