풀이

# STEP III 2002, 문제 1

순수수학 • 이상적분과 부피

**STEP III 2002, 1번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

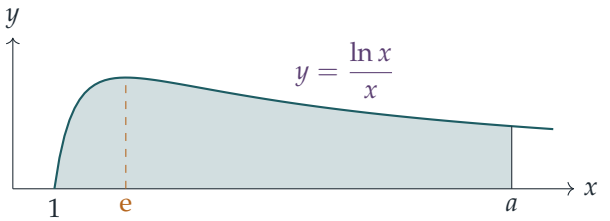
step.maths.org/questions/02-s3-q1

## 핵심 아이디어

$\frac{1}{x}$이 $\ln x$의 도함수(derivative)라는 사실만 알아차리면 두 적분 모두 쉬워진다. 넓이의 피적분함수(integrand)는 "어떤 함수와 그 함수의 도함수의 곱"이므로 보자마자 적분할 수 있다. 부피의 피적분함수 $(\ln x)^2/x^2$에는 $x$의 거듭제곱이 남아 있으므로 부분적분(integration by parts)을 두 번 하는데, 매번 $\ln x$의 거듭제곱을 미분하여 차수를 낮춘다. 흥미로운 부분은 두 극한(limit)의 대비이다. 곡선은 넓이가 한없이 커질 만큼 천천히 감소하지만, 이를 제곱하면 부피가 일정한 값에 머물 만큼 빠르게 감소한다.

## 풀이

$x \geq 1$이면 $\ln x \geq 0$이므로 곡선은 $x$축 위 또는 그 위쪽에 있고, 넓이는 단순히 적분값이다. 곡선은 $(1,0)$에서 출발하여 $x = \mathrm{e}$에서 최댓값에 이르고 (이때 $y' = (1 - \ln x)/x^2 = 0$), 그 뒤로는 축을 향해 천천히 감소한다.



### 넓이

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{2}(\ln x)^2) = \frac{\ln x}{x}$이므로

$$A(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^a = \tfrac{1}{2}(\ln a)^2,$$

이다. $\ln 1 = 0$이기 때문이다. (같은 방법으로, $u = \ln x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$로 치환하면 $\int_0^{\ln a} u\,\mathrm{d}u$를 얻는다.)

$a \to \infty$일 때 $\ln a \to \infty$이므로 $A(a) \to \infty$이다. 즉 넓이는 매우 느리게 커지기는 하지만 유계가 아니다.

### 부피

$x$축을 중심으로 회전시키면 부피는 $V(a) = \pi\int_1^a y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^a \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$이다.

$u = (\ln x)^2$, $\mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x$로 놓고 부분적분하면 $\mathrm{d}u = \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$, $v = -\frac{1}{x}$이므로

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(\ln x)^2}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$u = \ln x$, $\mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x$로 같은 과정을 한 번 더 하면

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

이 둘을 합치면

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(\ln x)^2 + 2\ln x + 2}{x} + C.$$

$x = 1$에서 괄호 안의 값은 $0 + 0 + 2$이므로 아래끝은 $-(-2) = +2$만큼 기여하고,

$$V(a) = \pi\left(2 - \frac{(\ln a)^2 + 2\ln a + 2}{a}\right).$$

> **생각해 보기** $(\ln a)^2/a$의 분자와 분모가 모두 무한대로 가는데, 이 값이 0으로 간다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

로그는 어떤 양의 거듭제곱보다도 느리게 증가한다. 이를 엄밀하게 보이기 위해, 모든 $t > 0$에 대해 $\ln t < t$에서 출발하자 (직선 $y = t$는 $y = \ln t$보다 위에 있다. 차 $t - \ln t$는 $t = 1$에서 최솟값 1을 가진다). $t = a^{1/4}$로 놓으면 $\frac{1}{4}\ln a < a^{1/4}$, 즉 $\ln a < 4a^{1/4}$이다. 따라서 $a > 1$일 때

$$0 < \frac{(\ln a)^2}{a} < \frac{16\,a^{1/2}}{a} = \frac{16}{\sqrt{a}} \to 0, \qquad 0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{4}{a^{3/4}} \to 0,$$

이고, 물론 $2/a \to 0$이다. 그러므로 $V(a)$ 안의 분수는 0으로 가고,

$$V(a) \to 2\pi \quad \text{단, } a \to \infty.$$

피적분함수가 양수이므로 $V(a)$는 $a$에 대해 증가한다. 따라서 부피는 $2\pi$를 향해 꾸준히 커지지만 결코 그 값에 도달하지는 않는다. 회전시키는 영역의 넓이는 무한하지만 입체의 부피는 유한한 것이다.

## 검산

- $a = 1$이면 두 공식 모두 당연히 0을 준다. $A(1) = 0$이고 $V(1) = \pi(2-2) = 0$이다.
- $-\big((\ln x)^2 + 2\ln x + 2\big)/x$를 미분하면 다시 $(\ln x)^2/x^2$가 나온다 ($2\ln x$ 항과 2 항은 괄호의 도함수와 상쇄된다).
- 수치적으로, $\pi \int_1^{10} (\ln x)^2/x^2 \, \mathrm{d}x$에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 2.54247이 나와 공식과 일치한다. 또 $x = \mathrm{e}^t$로 놓으면 무한 구간에서의 부피는 $\pi \int_0^{\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$이고, 이를 수치 계산하면 $6.283185\ldots = 2\pi$이다.

## 흔한 실수

- 아래끝을 빠뜨리는 것. $\ln 1 = 0$ 때문에 $x = 1$에서 대부분의 항이 사라지지만, 상수 항 $-2/x$는 사라지지 않으며 바로 이 항이 극한값 $2\pi$ 전체를 만들어 낸다.
- 아무 근거 없이 $(\ln a)^2/a \to 0$이라고 주장하는 것. $\ln a < 4a^{1/4}$와 같은 한 줄짜리 비교면 충분하다.

## STEP 너머

이 문제는 유한한 부피와 무한한 겉넓이를 가진 입체인 "가브리엘의 나팔(Gabriel's horn)" ($y = 1/x$의 회전체)의 사촌 격이다. 여기서는 평면 영역조차 넓이가 무한하다. 치환 $x = \mathrm{e}^t$를 하면 부피는 $\pi \int_0^{\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = \pi\,\Gamma(3) = 2!\,\pi$가 되는데, 이것이 감마 함수(gamma function) $\Gamma(n+1) = n!$를 처음 엿보는 장면이다. 이상적분(improper integral)과 "로그는 거듭제곱에 진다" 같은 비교를 엄밀하게 이해하는 것은 대학 1학년 해석학의 핵심 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이에 대해 읽어 보기 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.