풀이

STEP II 2002, 문제 9

역학 • 포물체 운동

STEP II 2002, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

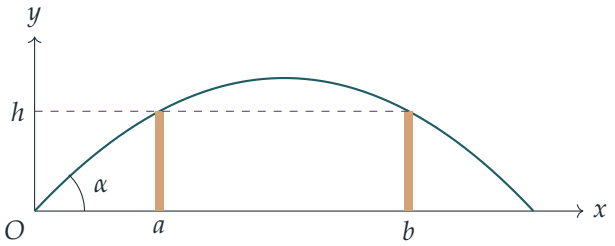
step.maths.org/questions/02-s2-q9

핵심 아이디어

경로(path)의 방정식을 x에 대한 y의 함수로 써 보자. "두 벽을 아슬아슬하게 넘는다"는 말은 경로가 두 벽의 꼭대기를 지난다는 뜻이므로, 방정식 $y = h$의 근은 정확히 $x = a$와 $x = b$이다. 이것은 근을 알고 있는 이차방정식(quadratic equation)이고, 이를 근의 합과 곱(sum and product of roots)과 비교하면 모든 것을 한꺼번에 얻는다. 그러면 둘째 부분은 두 공식을 h에 대하여 미분(differentiate)하는 문제가 된다.

풀이

입자를 중력만 받아 움직이는(공기 저항(air resistance)이 없는) 점으로 모형화하고, O를 원점으로 하여 x축을 수평 방향, y축을 연직 위 방향으로 잡는다. 그림이 의도하는 대로 $0 < a < b, h > 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$라고 가정한다.



$\tan\alpha$와 V 구하기

처음 속도의 성분이 $V\cos\alpha$와 $V\sin\alpha$이므로, 시간 t가 지난 뒤

$$x = Vt\cos\alpha, \qquad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = x/(V\cos\alpha)$를 대입하여 t를 소거하면 경로는

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha} = x\tan\alpha - kx^2, \qquad \text{여기서} k = \frac{g\sec^2\alpha}{2V^2} = \frac{g(1+\tan^2\alpha)}{2V^2} > 0.$$

입자는 각 벽을 아슬아슬하게 넘으므로, 경로는 꼭대기 (a,h)와 (b,h)를 지난다. 따라서 a와 b는

$$x\tan\alpha - kx^2 = h, \qquad \text{즉,} \qquad kx^2 - x\tan\alpha + h = 0.$$

의 근이다. 이것은 x에 대한 이차방정식이므로($k \neq 0$이므로) 근은 많아야 두 개이고, 따라서 그 근은 정확히 a와 b이다. 근의 합과 곱과 비교하면

$$a + b = \frac{\tan\alpha}{k}, \qquad ab = \frac{h}{k}.$$

둘째 식에서 $k = h/(ab)$이고, 이를 첫째 식에 넣으면

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{h(a+b)}{ab}.}$$

마지막으로 k의 정의로부터

$$\begin{aligned}\frac{2V^2}{g} = \frac{1+\tan^2\alpha}{k} &= \frac{ab}{h}\left(1 + \frac{h^2(a+b)^2}{a^2b^2}\right)\\ &= \frac{ab}{h} + \frac{(a+b)^2h}{ab},\end{aligned}$$

이므로 요구한 결과가 성립한다.

(이 값들을 쓰면 경로가 $y = \dfrac{h}{ab}x(a+b-x)$가 되어, $x = a$와 $x = b$에서 h와 같다는 것이 한눈에 보인다는 점도 눈여겨볼 만하다.)

벽을 높이기

두 번째 입자도 같은 거리 a와 b에 있는, 이제 높이가 $h + \delta h$인 두 벽을 아슬아슬하게 넘는다. 따라서 위의 공식은 h, α, V를 $h + \delta h$, $\alpha + \delta\alpha$, $V + \delta V$로 바꾸어도 성립한다.

$$\tan\alpha = \frac{a+b}{ab}h, \qquad \frac{2V^2}{g} = \frac{ab}{h} + \frac{(a+b)^2}{ab}h.$$

각 식은 (a, b를 고정하면) h만의 함수이므로, 작은 변화에 대해서는 $\delta(\text{양}) \approx \dfrac{\mathrm{d}(\text{양})}{\mathrm{d}h}\,\delta h$를 쓸 수 있다.

각도. $\tan\alpha = \frac{a+b}{ab}h$를 h에 대하여 미분하면 $\sec^2\alpha\,\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}h} = \dfrac{a+b}{ab}$이므로

$$\sec^2\alpha\,\delta\alpha \approx \frac{a+b}{ab}\,\delta h.$$

$\sec^2\alpha > 0$, $a, b > 0$, $\delta h > 0$이므로 우변은 양수이고, 따라서 $\delta\alpha > 0$이다. 즉 입자를 더 가파르게 던져야 한다.

생각해 보기 "≈"는 일차(first-order) 근사일 뿐이다. 이것으로 정말 $\delta\alpha$의 부호를 결론 내릴 수 있을까?

그렇다. 사실 근사를 전혀 쓰지 않고도 된다. $\tan\alpha$의 공식은 h에 대하여 일차식이므로 정확히 $\tan(\alpha+\delta\alpha)-\tan\alpha=\frac{a+b}{ab}\,\delta h>0$이다. tan는 $(0,\frac{\pi}{2})$에서 순증가(strictly increasing)하므로 $\alpha+\delta\alpha>\alpha$일 수밖에 없고, 따라서 $\delta\alpha>0$이다.

속력. $\dfrac{2V^2}{g}$를 h에 대하여 미분하면

$$\frac{4V}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}=-\frac{ab}{h^2}+\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(a+b)^2}{abh^2}\left(h^2-\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}\right),$$

이므로

$$\delta V\approx\frac{g(a+b)^2}{4Vabh^2}\left(h-\frac{ab}{a+b}\right)\left(h+\frac{ab}{a+b}\right)\delta h.$$

$h-\frac{ab}{a+b}$를 제외한 모든 인수는 $(V,a,b,h,\delta h>0$이므로$)$ 양수이다. 따라서 δV의 부호는 $h-\frac{ab}{a+b}$의 부호와 같다. 즉 $h>ab/(a+b)$이면 양수이고 $h<ab/(a+b)$이면 음수이므로, 요구한 결과가 성립한다. (이 도함수는 $h=ab/(a+b)$가 아닌 곳에서 0이 아니므로, δh가 충분히 작으면 일차 항이 실제로 부호를 결정한다.)

해석. $\tan\alpha=h(a+b)/(ab)$와 비교하면, 조건 $h>ab/(a+b)$는 정확히 $\tan\alpha>1$, 즉 $\alpha>45^\circ$이다. h의 함수로 보면 $2V^2/g$는 $p/h+qh$ 꼴이고, 이것은 $h=\sqrt{p/q}=ab/(a+b)$에서 최소가 되며, 이때 $\alpha=45^\circ$이고 $2V^2/g=2(a+b)$이다. 그러므로 이미 45°보다 가파르게 던지고 있다면 벽을 높이는 데 더 큰 속력이 필요하고, 그보다 완만하게 던지고 있다면 벽을 높이는 것(그리고 던지는 각을 45° 쪽으로 가파르게 하는 것)에 오히려 더 작은 속력이 필요하다.

검산

- $a=3\,\mathrm{m}$, $b=7\,\mathrm{m}$, $h=2.5\,\mathrm{m}$로 잡자. 그러면 $\tan\alpha=25/21$이고 $2V^2/g=8.4+11.90\ldots=20.30\ldots\,\mathrm{m}$이다. 이 값들로 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하면, 입자는 $x=3$과 $x=7$ 모두에서 $(10^{-11}$까지$)$ 높이 $2.5\,\mathrm{m}$에 있다.
- 대칭성(symmetry): 답은 a와 b에 대하여 대칭인데, 경로가 $x=\frac{1}{2}(a+b)$에 대하여 대칭인 포물선이므로 당연히 그래야 한다.
- 단위: ab/h와 $(a+b)^2h/(ab)$는 길이이므로 $2V^2/g$와 맞고, $\tan\alpha$는 무차원(dimensionless)이다.

- $h = ab/(a+b)$일 때 $\alpha = 45°$이고 $2V^2/g = 2(a+b)$이다. $a = 3$, $b = 7$이면 이 값은 20 m로, 위의 20.30 m보다 약간 작으므로 이것이 최솟값이라는 사실과 들어맞는다.

흔한 실수

- 두 벽에 대한 방정식을 따로 세운 뒤 억지로 연립하여 푸는 것: 그렇게 해도 되지만, 근의 합과 곱을 쓰면 두 줄로 끝난다.
- k를 다시 V로 바꿀 때 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$임을 잊는 것.
- $2V^2/g$의 도함수를 인수분해(factorise)하지 않고 δV의 부호를 말하는 것: 깔끔한 조건은 $h > 0$일 때 $h^2 > a^2b^2/(a+b)^2$에서 나온다.

STEP 너머

둘째 부분은 작은 민감도 분석(sensitivity analysis)이다. 사상 $h \mapsto (\alpha, V)$를 한 해 근처에서 선형화(linearise)하여, 출력이 어떻게 반응하는지 읽어 낸 것이다. 선형화, 그리고 이와 관련된 궤적족의 포락선(envelope)이라는 개념(주어진 속력으로 도달할 수 있는 모든 곳을 둘러싸는 "안전 포물선(parabola of safety)")은 대학 1학년 역학과 미적분학 강의에서 흔히 다루는 내용이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 이러한 근사 기법을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.