풀이

STEP II 2002, 문제 8

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP II 2002, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q8

핵심 아이디어

각 방정식은 가장 단순한 일계 선형 미분방정식(first-order linear equation)인 $y' = p(x)\,y$ 꼴이므로, p가 하나의 식으로 주어지는 구간에서는 해가 상수 곱하기 $\exp(\int p\,\mathrm{d}x)$이다. 문제는 $x = 0$에서 식이 나뉜다는 점이다. 양쪽에서 각각 따로 임의상수(arbitrary constant)가 생기는데, 한쪽은 주어진 y의 값으로 정해지고, 다른 쪽은 두 조각이 $x = 0$에서 만나야 한다는 조건으로만 정해진다. 첫 번째 부분은 바로 이 과정을 미리 연습하는 것이고, 두 번째 부분에는 절댓값(absolute value)이 숨어 있다.

풀이

첫 번째 방정식 쌍

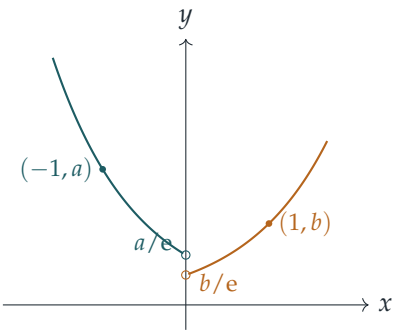
$x < 0$일 때 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$에서 어떤 상수 A에 대하여 $y = A\mathrm{e}^{-x}$이다. (다른 해가 없음을 보이려면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{x}) = \mathrm{e}^{x}(y' + y) = 0$이므로 $y\mathrm{e}^{x}$가 구간 $x < 0$에서 상수임에 주목하면 된다.) $x = -1$에서 $y = a$라는 조건으로부터 $A\mathrm{e} = a$이므로

$$y = a\,\mathrm{e}^{-x-1} \qquad (x < 0).$$

마찬가지로 $x > 0$일 때 $y = B\mathrm{e}^{x}$이고, $x = 1$에서 $y = b$이므로 $B = b/\mathrm{e}$이다. 따라서

$$y = b\,\mathrm{e}^{x-1} \qquad (x > 0).$$

$x \to 0^{-}$일 때 $y \to a/\mathrm{e}$이고, $x \to 0^{+}$일 때 $y \to b/\mathrm{e}$이다. 일반적으로 두 값은 다르며, 곡선은 y축에서 끊어져 뛴다. 아래 그림은 $a, b > 0$이고 $a > b$인 전형적인 경우를 나타낸다. 왼쪽은 축에 다가갈수록 내려가는 감소하는 지수함수이고, 오른쪽은 증가하는 지수함수이며, 빈 원은 서로 다른 두 극한값을 표시한다.



끊김이 없는 것은 두 극한이 일치할 때, 즉 $a/\mathrm{e} = b/\mathrm{e}$일 때, 다시 말해 다음이 성립할 때이고 그때뿐이다.

$$a = b.$$

이 경우 곡선은 $y = a\,\mathrm{e}^{|x|-1}$이며, $x = 0$에서 꺾이는 점을 가진 좌우 대칭의 "V" 모양 곡선이다.

$|\mathrm{e}^x - 1|$이 들어 있는 방정식

$\mathrm{e}^x > 1$인 것은 정확히 $x > 0$일 때이므로

$$|\mathrm{e}^x - 1| = \begin{cases} \mathrm{e}^x - 1, & x \geq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^x, & x < 0. \end{cases}$$

따라서 앞에서와 똑같이 방정식은 두 개의 보통의 선형 방정식으로 나뉜다.

$x > 0$일 때: $y' = (\mathrm{e}^x - 1)y$이다. $\mathrm{e}^x - 1$의 원시함수(antiderivative) 하나는 $\mathrm{e}^x - x$이므로 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{e}^x - x)}\right) = 0$이고

$$y = C\exp(\mathrm{e}^x - x).$$

$x = 1$에서 $y = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$이므로 $C\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$이고, 따라서 $C = \mathrm{e}$이다. 그러므로

$$y = \exp(\mathrm{e}^x - x + 1) \qquad (x \geq 0).$$

$x < 0$일 때: $y' = (1 - \mathrm{e}^x)y$이다. $1 - \mathrm{e}^x$의 원시함수 하나는 $x - \mathrm{e}^x$이므로

$$y = D\exp(x - \mathrm{e}^x).$$

> **생각해 보기** $x < 0$인 곳에서는 주어진 값이 하나도 없다. 그렇다면 D는 무엇으로 정해지는가?

$x = 0$에서의 연속성(continuity)으로 정해진다. 오른쪽에서 다가가면 $y \to \exp(1 - 0 + 1) = \mathrm{e}^2$이다. 왼쪽에서 다가가면 $y \to D\exp(0 - 1) = D/\mathrm{e}$이다. 두 값을 같게 놓으면

$D = \mathrm{e}^3$이므로

$$y = \exp(x - \mathrm{e}^x + 3) \qquad (x < 0).$$

두 결과를 합치면

$$y = \begin{cases} \exp(\mathrm{e}^x - x + 1), & x \geq 0, \\ \exp(x - \mathrm{e}^x + 3), & x < 0. \end{cases}$$

이번에는 $x = 0$에서 꺾이는 점조차 없다는 데 주목하자. 두 식 모두 $y'(0) = 0$을 주며, 이는 $|\mathrm{e}^0 - 1|\, y = 0$과 일치한다. $y > 0$이고 $|\mathrm{e}^x - 1| \geq 0$이므로 해는 모든 곳에서 증가하며, $x = 0$에서 $y = \mathrm{e}^2$인 정상 변곡점(stationary point of inflection)을 가진다.

극한

(i) $x > 0$일 때

$$y\exp(-\mathrm{e}^x) = \exp(\mathrm{e}^x - x + 1 - \mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{1-x} \to 0 \quad \text{극한: } x \to +\infty.$$

따라서 극한은 0이다. 인수 $\exp(-\mathrm{e}^x)$가 이중 지수적(double-exponential) 증가를 정확히 상쇄하고, 감소하는 e^{1-x}만 남는다.

(ii) $x < 0$일 때

$$y\,\mathrm{e}^{-x} = \exp(x - \mathrm{e}^x + 3 - x) = \exp(3 - \mathrm{e}^x) \to \mathrm{e}^3 \quad \text{극한: } x \to -\infty,$$

이는 $\mathrm{e}^x \to 0$이기 때문이다. 따라서 극한은 e^3이다. 다시 말해, 절댓값이 큰 음수 x에서 해는 $\mathrm{e}^3\mathrm{e}^x$처럼 행동하는데, 이는 예상대로이다. 그 영역에서는 $|\mathrm{e}^x - 1| \approx 1$이어서 방정식이 거의 $y' = y$이기 때문이다.

검산

- 답을 미분해 본다. $x > 0$에서 $y' = (\mathrm{e}^x - 1)y$이고, $x < 0$에서 $y' = (1 - \mathrm{e}^x)y$이다. $x = 1$에서 $\exp(\mathrm{e} - 1 + 1) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$이다.
- 수치적으로, 룽게–쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 $y(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \approx 15.154$에서 시작하여 $x = 0$까지 거꾸로 방정식을 따라가면 $y(0) \approx 7.38906 = \mathrm{e}^2$을 얻고, $x = -5$까지 계속하면 유효숫자 여섯 자리까지 $\exp(x - \mathrm{e}^x + 3)$과 일치한다.
- 극한 (ii)의 경우 $x = -10$에서 $y\mathrm{e}^{-x} \approx 20.0846$으로 $\mathrm{e}^3 \approx 20.0855$에 가깝다. (i)의 경우 $x = 10$에서 $\mathrm{e}^{1-x} \approx 1.2 \times 10^{-4}$이다.

흔한 실수

- $x = 1$에서의 조건을 $x = 0$의 **양쪽** 모두의 상수를 정하는 데 사용하는 것. 두 구간은 별개의 문제이며, 왼쪽의 상수는 오직 연속성으로부터만 나온다.
- 절댓값을 빼먹고 모든 x에 대해 $y' = (\mathrm{e}^x - 1)y$를 푸는 것. 이렇게 하면 $x < 0$에서 틀린 곡선을, (ii)에서 틀린 극한을 얻는다.
- $\int (\mathrm{e}^x - 1)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - x$라고 써 놓고는 $\exp(\mathrm{e}^x - x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}/x$라고 쓰는 것(올바른 값은 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^{-x}$이다).

STEP 너머

방정식 $y' = |\mathrm{e}^x - 1|\,y$의 계수(coefficient)는 $x = 0$에서 연속이지만 미분가능(differentiable)하지 않다. $y' = f(x, y)$에 대한 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem, 피카르–린델뢰프(Picard–Lindelöf) 정리)는 f가 x에 대해 연속이고 y에 대해 립시츠(Lipschitz) 조건을 만족하기만 하면 되므로, 여기서는 하나의 조건만으로 실수 전체에서 해가 정해지고 0에서의 연속성은 저절로 성립한다. 첫 번째 부분에서는 우변 자체가 $x = 0$에서 끊어져 뛰기 때문에 조각들을 잇기 위해 추가 조건이 필요했던 것이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 일계 방정식에 대한 이러한 존재성과 유일성 문제를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.