풀이

STEP II 2002, 문제 7

순수수학 • 직선의 벡터 기하

> **STEP II 2002, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q7

핵심 아이디어

여기서 모든 것은 내적(dot product)이다. 단위 방향벡터가 $\mathbf{u}$인, 원점을 지나는 직선이 m_1과 $\pi/4$의 각을 이루는 것은 정확히 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_1| = |\mathbf{d}_1|\cos\frac{\pi}{4}$일 때이며, 이로써 첫 부분은 연립방정식 문제가 된다. 후반부에서 "수직"은 내적이 0이라는 뜻이고, 공간의 두 직선은 한 평면 위에 있으면서(coplanar) 평행하지 않을 때에만 만난다. 한 평면 위에 있다는 것은 스칼라 삼중곱(scalar triple product)이 0이라는 것이다. 반전은 한 평면 위에 있는 경우가 알고 보니 평행한 경우라는 점이다.

풀이

직선 m_3과 m_4

$\mathbf{d}_1 = \mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{i}+\mathbf{k}$라 하자. 둘 다 길이가 $\sqrt{2}$이다. $\mathbf{u} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$를 O를 지나는 직선 방향의 단위벡터(unit vector)라 하자. 두 직선 사이의 각은 두 직선이 이루는 예각이므로 조건은

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_1| = \sqrt{2}\cos\tfrac{\pi}{4} = 1, \qquad |\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_2| = 1,$$

즉 $a+b = \pm 1$이고 $a+c = \pm 1$이다. $\mathbf{u}$를 $-\mathbf{u}$로 바꾸어도 같은 직선이 되고 두 부호가 모두 뒤집히므로, 경우는 두 가지뿐이다.

부호가 같은 경우: $a+b=1, a+c=1$. 그러면 $b=c=1-a$이고, $a^2+b^2+c^2=1$에서

$$a^2+2(1-a)^2 = 1 \iff 3a^2-4a+1=0 \iff (3a-1)(a-1)=0.$$

따라서 $a=1$이면 $\mathbf{u}=\mathbf{i}$이고, $a=\frac{1}{3}$이면 $\mathbf{u}=\frac{1}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$이다.

부호가 반대인 경우: $a+b=1, a+c=-1$. 그러면 $b=1-a, c=-1-a$이고, $a^2+(1-$

$a)^2 + (1+a)^2 = 1$에서 $3a^2 + 2 = 1$을 얻는데, 이는 실근이 없다.

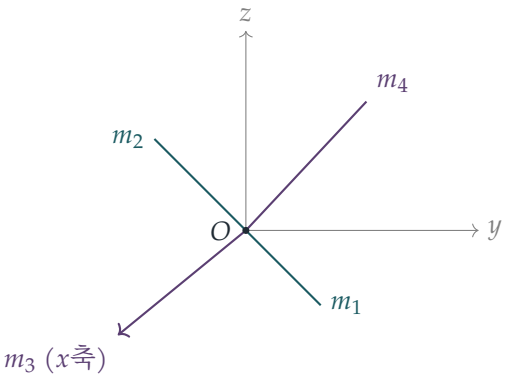
따라서 두 직선의 방향은

$$m_3 : \ \mathbf{i}, \qquad m_4 : \ \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

이다(이름은 서로 바꾸어 붙여도 된다). 단위벡터 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i}$와 $\mathbf{e}_4 = \frac{1}{3}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$에 대하여

$$\cos\theta = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4 = \tfrac{1}{3},$$

이고 이 값은 양수이므로 이것이 예각이다. 즉 그 코사인 값은 $\frac{1}{3}$이다.



점 잡기

A는 m_1 위에서 O로부터 거리 $\lambda\sqrt{2}$인 점이므로 $\pm\lambda(1,1,0)$이다. 좌표가 음이 아니어야 하므로 $\lambda \geq 0$으로 하여 $A = \lambda(1,1,0)$으로 잡아야 한다($\lambda\sqrt{2}$는 거리이므로 처음부터 끝까지 $\lambda \geq 0$으로 둘 수 있다). 마찬가지로 $B = \lambda(1,0,1)$이다. m_3, m_4 위에서 좌표가 음이 아닌 단위점은 $(1,0,0)$과 $\frac{1}{3}(1,2,2)$이다.

이 중 어느 것이 P이고 어느 것이 Q인지는 m_3과 m_4의 이름 붙이기에 따라 달라진다. 그러나 이는 상관없다. 대칭변환(reflection) $(x,y,z) \mapsto (x,z,y)$는 A와 B를 맞바꾸고 $(1,0,0)$과 $\frac{1}{3}(1,2,2)$를 모두 고정하므로, 한 가지 이름 붙이기의 배치를 다른 배치로 옮긴다(이때 직선 AQ와 BP의 역할이 서로 바뀐다). 수직 관계와 교차 여부는 대칭변환으로 보존되므로

$$A = (\lambda,\lambda,0), \quad B = (\lambda,0,\lambda), \quad P = (1,0,0), \quad Q = (\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}).$$

로 잡는 것으로 충분하다. 그러면

$$\overrightarrow{AQ} = (\tfrac{1}{3} - \lambda,\ \tfrac{2}{3} - \lambda,\ \tfrac{2}{3}), \qquad \overrightarrow{BP} = (1-\lambda,\ 0,\ -\lambda).$$

소문항 (i)

AQ가 BP에 수직인 것은 정확히 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}=0$일 때이다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP} &= (\tfrac{1}{3}-\lambda)(1-\lambda)+0-\tfrac{2}{3}\lambda \\ &= \lambda^2-\tfrac{4}{3}\lambda+\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{3}\lambda = \lambda^2-2\lambda+\tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

이 값은 $(\lambda-1)^2=\frac{2}{3}$일 때, 즉

$$\lambda = 1\pm\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 1\pm\tfrac{\sqrt{6}}{3}.$$

일 때 0이 된다. 두 값 모두 양수이므로($\sqrt{6}<3$이기 때문) 음이 아니라는 조건을 만족하며, 이차식은 다른 근을 갖지 않는다. 따라서 $AQ\perp BP$가 되는 λ의 값은 정확히 두 개이다.

소문항 (ii)

> ? **생각해 보기** 3차원에서 두 직선이 만나는지는 어떻게 판정하는가?

서로 다른 두 직선은 한 평면 위에 있고 평행하지 않을 때, 그리고 그때에만 만난다. 직선 AQ와 BP가 한 평면 위에 있는 것은 정확히 네 점 A, B, P, Q가 한 평면 위에 있을 때이며, 이는 정확히 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$의 스칼라 삼중곱이 0일 때이다.

여기서 $\overrightarrow{AB}=(0,-\lambda,\lambda)$, $\overrightarrow{AP}=(1-\lambda,-\lambda,0)$이므로, 첫째 행을 따라 전개하면

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 0 & -\lambda & \lambda \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3}-\lambda & \frac{2}{3}\end{vmatrix} &= \lambda\cdot\tfrac{2}{3}(1-\lambda)+\lambda\Big[(1-\lambda)(\tfrac{2}{3}-\lambda)+\lambda(\tfrac{1}{3}-\lambda)\Big] \\ &= \lambda\Big[\tfrac{2}{3}-\tfrac{2}{3}\lambda+\tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{3}\lambda\Big] = 2\lambda(\tfrac{2}{3}-\lambda),\end{aligned}$$

이다. 따라서 $\lambda\neq 0$이면 두 직선은 $\lambda=\frac{2}{3}$일 때에만 만날 수 있다.

그런데 $\lambda=\frac{2}{3}$이면

$$\overrightarrow{AQ}=(-\tfrac{1}{3},\,0,\,\tfrac{2}{3}),\qquad \overrightarrow{BP}=(\tfrac{1}{3},\,0,\,-\tfrac{2}{3})=-\overrightarrow{AQ},$$

이므로 두 직선은 평행하다. $\overrightarrow{BA}=(0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$는 $\overrightarrow{BP}$의 상수배가 아니어서 A가 BP 위에 있지 않으므로, 두 직선은 같은 직선이 아니다. 서로 다른 두 평행선은 결코 만나지 않는다.

따라서 0이 아닌 모든 λ에 대하여 직선 AQ와 BP는 만나지 않는다. ($\lambda=0$이면 $A=B=O$이고 두 직선은 O에서 만나는데, 이것이 문제에서 이 경우를 제외한 이유이다.)

검산

- $\mathbf{i}$가 $\mathbf{i}+\mathbf{j}$와 각 $\pi/4$를 이룬다는 것은 바로 보이므로, 이차방정식의 첫째 근으로서 안심할 수 있다.

- $\lambda = 1 + \sqrt{2/3} \approx 1.8165$에서 내적 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BP}$를 수치 계산하면 $0(10^{-16}$ 이내)이 되고, $\lambda \approx 0.1835$에서도 마찬가지이다.
- $\lambda = 0.001, 0.002, \ldots, 5$에 대하여(그리고 P와 Q의 다른 이름 붙이기에 대해서도) 직선 AQ와 BP 사이의 최단 거리를 계산해 보면 결코 0이 되지 않으며, $\lambda \to 0$일 때에만 0으로 다가간다.

흔한 실수

- $a + b = 1, a + c = -1$인 경우를 빠뜨리는 것: 이 경우에서는 해가 나오지 않지만, 반드시 배제해 보여야 한다.
- "$\lambda = \frac{2}{3}$일 때 삼중곱이 0이 되므로 두 직선은 만난다"에서 멈추는 것. 한 평면 위의 직선은 평행할 수 있으며, 여기서 바로 그렇다.

STEP 너머

스칼라 삼중곱은 3×3 행렬식(determinant)이며, 이것이 0이라는 것은 세 벡터가 일차종속(linearly dependent)이라는 뜻이다. 꼬인 위치에 있는 두 직선(skew lines) 사이의 최단 거리 $|\overrightarrow{AB} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|/|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$도 같은 재료로 만들어진다. 대학 1학년 선형대수학(linear algebra) 강의에서는 이러한 아이디어들이 행렬식, 계수(rank), 부분공간의 기하를 통해 하나로 묶인다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 3차원 그림을 풍부하게 곁들여 이 내용을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.