풀이

STEP II 2002, 문제 6

순수수학 • 경사면 위의 직선

> **STEP II 2002, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q6

핵심 아이디어

모든 것은 경사면(inclined plane)에 관한 한 가지 사실에 기초한다. 평면 위의 한 직선이 최대 경사선(line of greatest slope)과 이루는 각이 ψ이면, 이 직선이 수평면(horizontal)과 이루는 각 γ는

$$\sin\gamma = \cos\psi \sin\beta,$$

를 만족한다. 여기서 β는 최대 경사선의 경사각이다. 이 사실을 알고 나면 문제에 나오는 각 직선마다 삼각방정식이 하나씩 생기고, l_1과 l_3이 수직이라는 사실이 코사인을 사인으로 바꾸어 준다. 그 뒤로는 대수 계산일 뿐이다.

풀이

경사면 위 직선의 기울기

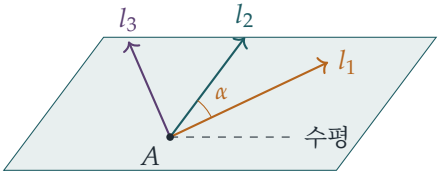
A에 원점을 두고 z축이 연직 방향이 되도록 좌표축을 잡는다. $\mathbf{h}$를 P 위에 놓인 수평 단위벡터(unit vector)라 하고, $\mathbf{u}$를 최대 경사선 l_2를 따라 위쪽을 향하는 단위벡터라 하자. $\mathbf{u}$는 P 안에서 $\mathbf{h}$에 수직이다. l_2가 수평면과 이루는 각이 β이므로

$$\mathbf{h} = (1,0,0), \qquad \mathbf{u} = (0, \cos\beta, \sin\beta).$$

로 잡을 수 있다. $\mathbf{u}$와 $\mathbf{h}$는 정규직교(orthonormal)이고 P를 생성(span)하므로, P 위에서 $\mathbf{u}$와 각 ψ를 이루는 단위벡터는 $\mathbf{d} = \cos\psi\,\mathbf{u} + \sin\psi\,\mathbf{h}$이다. 이 벡터의 연직 성분은 $\cos\psi\sin\beta$이다. 단위 방향벡터가 $\mathbf{d}$인 직선이 수평면과 이루는 각 γ는 $\sin\gamma =$ |연직 성분: $\mathbf{d}$|를 만족하므로

$$\sin\gamma = |\cos\psi| \sin\beta. \qquad (*)$$

이다.



첫 번째 배치

P 위에서 직선 l_1은 l_2와 예각(acute angle) α를 이루고, 수평면과 이루는 각은 $\pi/6$이다. $(*)$에 의해

$$\cos\alpha \sin\beta = \sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다(여기서 α가 예각이므로 $\cos\alpha > 0$이다).

? **생각해 보기** l_3이 l_2와 이루는 각은 얼마인가?

세 직선은 모두 같은 평면 P 위에 있고 A를 지난다. $l_3 \perp l_1$이므로 l_3의 방향은 l_1의 방향을 P 안에서 직각만큼 돌린 것이고, 따라서 l_3은 l_2와 각 $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$를 이룬다(부호는 어느 쪽으로 돌리느냐에 따라 달라지지만 상관없다). 어느 경우든 α가 예각이므로 $|\cos(\alpha \pm \frac{\pi}{2})| = \sin\alpha$이다. 따라서 l_3에 대해 $(*)$를 적용하면

$$\sin\alpha \sin\beta = \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

을 얻는다.

두 결과를 각각 제곱하여 더하면

$$\sin^2\beta\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}, \qquad \text{따라서} \qquad \sin^2\beta = \tfrac{3}{4}.$$

이다. 직선이 수평면과 이루는 각 β는 $[0, \frac{\pi}{2}]$에 속하므로 $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $\beta = \pi/3$이다. 이로써 원하는 결과를 얻는다. (덧붙이자면, 두 식을 나누면 $\tan\alpha = \sqrt{2}$를 얻는데, 이는 실제로 예각에 해당하므로 이러한 배치가 존재한다.)

회전한 배치

평면은 바뀌지 않으므로 l_2와 $\beta = \pi/3$도 그대로이다. 이제 l_1은 l_2와 예각 θ를 이루고, l_3은 앞에서와 똑같이 각 $\theta \pm \frac{\pi}{2}$를 이룬다. $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$을 이용하여 각 직선에 $(*)$를 적용하면 다음을 얻는다.

$$\sin\phi = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,$$
$$\sin 2\phi = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.$$

2ϕ는 수평면과 이루는 각이므로 $0 \le 2\phi \le \frac{\pi}{2}$이고, $\cos\theta > 0$이므로 $\phi \neq 0$이다. 따라서 $\sin\phi > 0$이므로 두 번째 식을 첫 번째 식으로 나눌 수 있다.

$$\tan\theta = \frac{\sin 2\phi}{\sin\phi} = \frac{2\sin\phi\cos\phi}{\sin\phi} = 2\cos\phi.$$

$t = \tan^2\theta$라 하면 $\cos^2\phi = t/4$이고 $\sin^2\phi = 1 - t/4$이다. θ를 소거하기 위해 첫 번째 식을 제곱한 식에 $\cos^2\theta = 1/(1+\tan^2\theta)$를 대입하면

$$1 - \frac{t}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1+t} \quad\Longrightarrow\quad (4-t)(1+t) = 3 \quad\Longrightarrow\quad t^2 - 3t - 1 = 0.$$

이다. 따라서 $t = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{13}\right)$이다. $t = \tan^2\theta \ge 0$이고 $\sqrt{13} > 3$이므로 양의 부호를 택해야 한다.

$$\tan^2\theta = \frac{3+\sqrt{13}}{2},$$

이로써 원하는 결과를 얻는다.

이 근(root)은 실제로 가능한 값이다. 이 근으로부터 $\cos^2\phi = t/4 \approx 0.826$이므로 $\phi \approx 24.7^\circ$, $2\phi \approx 49.4^\circ < 90^\circ$이고, $\theta \approx 61.2^\circ$는 예각이다.

검산

- 첫 번째 배치에서 $\tan\alpha = \sqrt{2}$이면 $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$, $\sin\alpha = \sqrt{2/3}$이고, $\sin\beta = \sqrt{3}/2$와 곱한 두 값은 $\frac{1}{2}$와 $1/\sqrt{2}$로, 마땅히 그래야 할 값이 나온다.
- 수치로 확인하면 $\tan^2\theta \approx 3.3028$이므로 $\tan\theta \approx 1.8174$, $\theta \approx 61.18^\circ$이다. 그러면 $\sin\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \approx 0.4175$에서 $\phi \approx 24.68^\circ$를 얻고, $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \approx 0.7589 \approx \sin(49.35^\circ) = \sin 2\phi$이다.
- $(*)$의 극한 경우: $\psi = 0$이면 l_2 자신(각 β)이 되고, $\psi = \frac{\pi}{2}$이면 수평인 직선(각 0)이 된다.

흔한 실수

- $\sin\gamma = \cos\psi\sin\beta$ 대신 $\tan\gamma = \cos\psi\tan\beta$를 쓰는 실수. 탄젠트로 된 식은 ψ를 위에서 내려다본 수평 평면도에서 잴 때만 옳은데, 여기서 α와 θ는 P 안에서 잰 각이다.
- 음의 근 $\frac{1}{2}(3-\sqrt{13})$을 버리는 것을 잊는 실수. 제곱은 음수가 될 수 없다.

STEP 너머

공식 $(*)$는 사실 내적(dot product)이다. 직선이 수평면과 이루는 각의 사인은 그 직선의 단위벡터의 연직 방향 성분이며, 그 벡터를 평면의 정규직교 기저(orthonormal basis)로 나

타내면 모든 일이 해결된다. 평면을 정규직교 벡터들이 생성하는 공간으로, 각을 내적으로 생각하는 것은 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)과 회전(rotation)의 기하학의 출발점이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 개념들을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.