풀이

STEP II 2002, 문제 5

순수수학 • 로지스틱 사상의 반복

> **STEP II 2002, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q5

핵심 아이디어

모든 것은 포물선(parabola) $y = kx(1-x)$에 달려 있다. 이 포물선은 $[0,1]$에서 $x = \frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{k}{4}$를 가진다. 이 사실 하나만으로 수학적 귀납법(induction)을 써서 소문항 (i)이 해결된다. 소문항 (ii)와 (iii)은 각각 고정점(fixed point)과 주기(period)가 2인 점을 묻는다. (iii)의 요령은 x_1을 b로 나타내는 것이다: $x_1 = ka(1-a) = ab$. 그러면 $x_2 = a$는 b에 대한 삼차방정식(cubic)이 되고, 이 삼차방정식에는 눈에 띄는 근(root)이 하나 있는데, 그것이 바로 (ii)의 고정점이다.

풀이

소문항 (i)

n에 대한 수학적 귀납법을 쓴다. $n = 0$인 경우는 주어져 있다. $0 < x_n < 1$이라고 가정하자. 그러면 $x_n > 0$이고 $1 - x_n > 0$이므로 $x_n(1-x_n) > 0$이다. 완전제곱식을 만들면

$$x_n(1-x_n) = \frac{1}{4} - \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

$0 < k < 4$이므로 양변에 k를 곱해도 부등호의 방향은 그대로이고,

$$0 < x_{n+1} = kx_n(1-x_n) \leq \frac{k}{4} < 1.$$

따라서 $0 < x_{n+1} < 1$이고, 수학적 귀납법에 의해 모든 n에 대해 $0 < x_n < 1$이다. 각 가정이 어디에 쓰였는지 눈여겨보자. 아래쪽 경계에는 $k > 0$이, 위쪽 경계에는 $k < 4$가 쓰였다.

소문항 (ii)

수열이 상수수열이 되려면 $x_1 = x_0$, 즉 $a = ka(1-a)$이기만 하면 된다. $a \neq 0$이므로 양변을 a로 나누어 $1 = k(1-a)$를 얻고, $a \neq 1$이므로 $1-a$로 나눌 수 있다:

$$k = \frac{1}{1-a}.$$

역으로, 이 k에 대해 $x_1 = a$이므로 그 뒤의 모든 항도 a이다.

소문항 (iii)

$b = k(1-a)$로 두면

$$x_1 = ka(1-a) = ab.$$

$x_2 = a$이면 수열은 주기 2로 반복되므로, 조건 전체는 결국 $x_2 = a$일 뿐이다:

$$k\,(ab)(1-ab) = a.$$

$a \neq 0$으로 나누면 $kb(1-ab) = 1$이다. $a \neq 1$이므로 $k = \dfrac{b}{1-a}$로 쓸 수 있고, 따라서

$$\frac{b^2(1-ab)}{1-a} = 1 \quad \Longrightarrow \quad b^2 - ab^3 = 1-a \quad \Longrightarrow \quad ab^3 - b^2 + (1-a) = 0,$$

이것이 구하는 결과이다.

생각해 보기 이 삼차방정식의 근 가운데 바로 알아볼 수 있는 것은 무엇이며, 그것은 무엇을 뜻하는가?

$b = 1$을 대입하면 $a - 1 + 1 - a = 0$이므로 $b = 1$은 근이다. 그런데 $b = 1$은 $k(1-a) = 1$을 뜻하고, 이는 소문항 (ii)의 고정점이다: 이때 $x_1 = ab = a$이다. 따라서 추가 조건 $x_1 \neq a$, 즉 $ab \neq a$는 정확히 $b \neq 1$과 같다. 인수 $b-1$로 나누면

$$ab^3 - b^2 + (1-a) = (b-1)(ab^2 + (a-1)b + (a-1)),$$

이며, 이는 전개해 보면 확인할 수 있다. 따라서 b는

$$ab^2 - (1-a)b - (1-a) = 0$$

의 근 가운데 1이 아닌 것이어야 한다. $a \neq 0$이므로 이것은 실제로 이차방정식(quadratic)이고,

$$b = \frac{(1-a) \pm \sqrt{(1-a)^2 + 4a(1-a)}}{2a} = \frac{(1-a) \pm \sqrt{(1-a)(1+3a)}}{2a}.$$

실근을 가지려면 $(1-a)(1+3a) \geq 0$이어야 하고, 이는 $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$을 뜻한다. $a \neq 0, 1$이므로 $-\frac{1}{3} \leq a < 1, a \neq 0$이 남는다. 그 밖의 a에 대해서는 조건을 만족하는 실수 k가 없다.

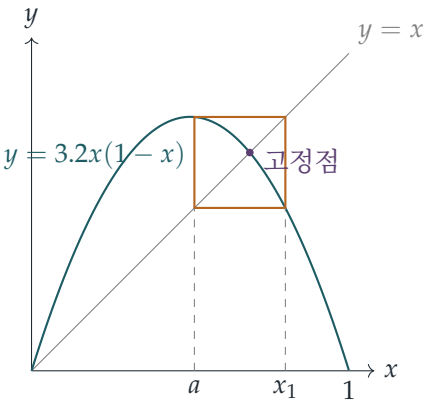
이 범위에서는 $1-a>0$이므로, $\sqrt{(1-a)(1+3a)}/(1-a)=\sqrt{(1+3a)/(1-a)}$를 이용해 $1-a$로 나누면 $k=b/(1-a)$를 깔끔한 꼴로 얻는다:

$$\boxed{k=\frac{1}{2a}\left(1\pm\sqrt{\frac{1+3a}{1-a}}\right),\qquad -\tfrac{1}{3}\le a<1,\ a\neq 0.}$$

마지막으로 할 일이 하나 있다. 두 값 가운데 어느 것도 제외된 근 $b=1$이 아님을 확인해야 한다. 이 이차방정식이 $b=1$을 근으로 갖는 것은 $a+(a-1)+(a-1)=0$, 즉 $a=\frac{2}{3}$일 때뿐이다. 이때 $\sqrt{(1+3a)/(1-a)}=3$이고 두 값은 $k=3$($b=1$, 곧 고정점이므로 제외된다)과 $k=-\frac{3}{2}$이다. 따라서:

- $a=\frac{2}{3}$이면 가능한 값은 $k=-\frac{3}{2}$뿐이다;
- $a=-\frac{1}{3}$이면 두 부호가 일치하여 $k=-\frac{3}{2}$이다;
- 그 밖의 허용된 모든 a에 대해서는 두 부호 모두 진짜 2-주기를 준다.

아래 그림은 $k=3.2$일 때 그러한 주기 하나를 보여 준다. 궤도는 $a\approx 0.513$과 $x_1\approx 0.800$ 사이를 오가며, 포물선과 직선 $y=x$ 사이에 정사각형을 그린다.



검산

- $a=0.7$로 두자. 공식에 따르면 $k\approx 3.0104$ 또는 $k\approx -1.5818$이다. $k\approx 3.0104$이면 $x_1\approx 0.6322$이고 이어서 $x_2\approx 0.7000$이므로, 궤도는 실제로 주기 2를 가진다.
- $a=\frac{2}{3}$일 때 $k=3$이면 $x_1=3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$으로, 예측대로 고정점이다. $k=-\frac{3}{2}$이면 $x_1=-\frac{1}{3}$이고 $x_2=-\frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{3})\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$이므로 진짜 2-주기이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 수천 개의 $a\in[-\frac{1}{3},1)$에 대해 두 부호 모두에서 $x_2=a$가 성립했다. 이 구간 밖의 a에 대해서는 k를 훑어보아도 고정점 $k=1/(1-a)$ 외에는 해가 없었다.

흔한 실수

- 삼차방정식이 고정점 해를 반드시 포함한다는 사실을 잊는 것. 근 $b = 1$을 알아보는 것이 삼차방정식을 쉽게 만드는 열쇠이다.
- 실근 조건 $-\frac{1}{3} \leq a < 1$을 빠뜨리거나, $a = \frac{2}{3}$에서 두 k 값 중 하나가 고정점이므로 버려야 한다는 점을 놓치는 것.
- (i)에서 $x_{n+1} \leq \frac{1}{4}k$만 증명하고, $k < 4$이므로 이것이 1보다 엄격히 작다는 점을 밝히지 않는 것.

STEP 너머

이것은 로지스틱 사상(logistic map)으로, 단순한 규칙이 매우 풍부한 거동을 낳는 고전적인 예이다. 일반적인 범위 $0 < k \leq 4$의 k에 대해, 여기서 찾은 2-주기는 정확히 $k > 3$일 때 존재한다. $k = 3$에서 고정점은 안정성을 잃고 두 점으로 갈라진다. 이것이 첫 번째 **주기 배가 분기**(*period-doubling bifurcation*)이다. 이어서 배가가 계속 일어나는데, 그 k 값들은 등비적으로 촘촘해지며(그 비율은 파이겐바움(Feigenbaum) 상수가 정한다) 마침내 사상은 혼돈(chaos) 상태가 된다. Strogatz의 *Nonlinear Dynamics and Chaos*(비선형 동역학과 혼돈)는 이 이야기 전체를 대학 1학년 수준에서 들려준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.