풀이

STEP II 2002, 문제 4

순수수학 • 적분에서 얻는 부등식

> **STEP II 2002, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q4

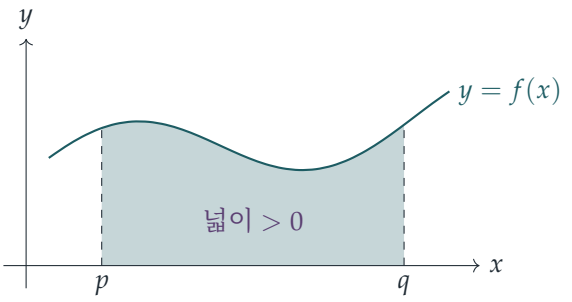
핵심 아이디어

$a > 0$이고 $b^2 < 4ac$인 이차식(quadratic) $as^2 - bs + c$는 실근(real root)이 없고 최고차항 계수(leading coefficient)가 양수이므로, **모든** 실수 s에 대하여 양수이다. s 자리에 무엇을 대입하든(x, $\sin x$ 또는 $1/x$), 그 결과로 얻는 함수는 양수이므로 어떤 구간에서 적분(integral)하더라도 그 값은 양수이다. 따라서 각 문항에서는 적분값이 요구하는 부등식(inequality)에 나오는 수와 정확히 같아지도록 치환(substitution)과 구간을 고르기만 하면 된다.

풀이

먼저 그려 보기

적분 $\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x$는 $x = p$부터 $x = q$까지 곡선 $y = f(x)$와 x축 사이의 부호 있는 넓이(signed area)이다. 축 위쪽의 넓이는 양수로, 아래쪽의 넓이는 음수로 센다. $p < x < q$ 전체에서 $f(x) > 0$이면 그 구간에서 곡선 전체가 축 위에 있으므로, 영역에는 음수 부분이 없고 실제로 (0이 아닌) 넓이를 가진다. 따라서 적분값은 엄밀히 양수이다. (이 문제에 나오는 함수는 모두 연속(continuous)이므로 넓이가 잘 정의된다.)



모든 문항에서 쓰는 사실

$a > 0$이고 $b^2 < 4ac$일 때 $g(s) = as^2 - bs + c$라 하자. 완전제곱식(completing the square)으로 고치면

$$g(s) = a\left(s - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

$a > 0$이므로 첫째 항은 0 이상이고, $4ac - b^2 > 0$이고 $a > 0$이므로 둘째 항은 엄밀히 양수이다. 따라서 모든 실수 s에 대하여 $g(s) > 0$이다.

소문항 (i)

$f(x) = ax^2 - bx + c = g(x)$로 놓으면, 이 함수는 모든 x에 대하여 양수이다. 원하는 어떤 구간에서 적분해도 되는데, $[0, 1]$을 택하면 가장 간단한 수가 나온다.

$$0 < \int_0^1 (ax^2 - bx + c)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c.$$

양변에 6을 곱하면 $2a - 3b + 6c > 0$, 즉 $3b < 2a + 6c$이므로 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

이번에는 $f(x) = a\sin^2 x - b\sin x + c = g(\sin x)$이다. g는 모든 실수에서 양수이므로 당연히 $\sin x$에서도 양수이고, 따라서 모든 x에 대하여 $f(x) > 0$이다.

> **생각해 보기** 어떤 구간에서 적분해야 할까?

목표 부등식에서 π는 a와 c에는 곱해져 있지만 b에는 곱해져 있지 않다. $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $\int \sin x\,\mathrm{d}x = 1$에는 π가 없지만, $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$와 $\int 1\,\mathrm{d}x$에는 있다. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$를 이용하면

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

따라서

$$0 < \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a\pi}{4} - b + \frac{c\pi}{2}.$$

양변에 4를 곱하면 $a\pi + 2c\pi - 4b > 0$, 즉 $4b < (a+2c)\pi$이므로 증명이 끝난다.

소문항 (iii)

? **생각해 보기** 어떤 함수를 적분해야 $\ln(q/p)$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $q-p$가 나올까?

이 값들은 각각 $\int_p^q \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, $\int_p^q \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int_p^q 1\,\mathrm{d}x$이다. 그러므로

$$f(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} + c = g\left(\frac{1}{x}\right),$$

로 놓는다. 이 함수는 $x > 0$에서 정의되고 연속이며, g가 모든 곳에서 양수이므로 그 범위에서 양수이다. $q > p > 0$이므로 구간 $[p, q]$는 $x = 0$을 포함하지 않고, 따라서

$$\begin{aligned} 0 < \int_p^q \left(\frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} + c\right)\mathrm{d}x &= \left[-\frac{a}{x} - b\ln x + cx\right]_p^q \\ &= a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) - b\ln\frac{q}{p} + c(q-p). \end{aligned}$$

이항하여 정리하면 $b\ln(q/p) < a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + c(q-p)$이므로 증명이 끝난다. (조건 $p > 0$ 덕분에 두 로그가 모두 정의되어 $\ln q - \ln p = \ln(q/p)$로 쓸 수도 있다.)

검산

$a = b = c = 1$로 놓으면 $b^2 = 1 < 4 = 4ac$이다. 이때 (i)은 $3 < 8$, (ii)는 $4 < 3\pi \approx 9.42$가 되고, (iii)은 $p = 1$, $q = 2$일 때 $\ln 2 \approx 0.693 < \frac{1}{2} + 1 = 1.5$가 된다. 모두 성립한다. 또한 조건을 만족하는 20 000개의 무작위 순서쌍 (a, b, c)에 대하여, b^2이 $4ac$보다 아주 조금 작은 경우까지 포함해 세 부등식을 모두 시험해 보았고, 각 적분값을 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 확인하였다. 조건이 없으면 부등식이 성립하지 않을 수 있다는 점에 주의하자. 예를 들어 $a = 1$, $b = 10$, $c = 1$이면 $30 > 8$이므로 (i)이 성립하지 않는다.

흔한 실수

- $f > 0$임을 정당화하지 않는 것. 조건 $a > 0$과 $b^2 < 4ac$가 바로 이차식을 양수로 만드는 조건이며, 이 점을 반드시 밝혀야 한다.
- (ii)에서 $\frac{\pi}{4}$ 대신 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$로 계산하는 것.
- (iii)에서 $p > 0$이므로 (f가 정의되지 않는) $x = 0$이 구간에 들어가지 않는다는 점을 언급하지 않는 것.

STEP 너머

"양의 연속함수의 적분은 양수이다"라는 원리는 대학 첫 해석학(analysis) 강의에서 리만 적분(Riemann integral)에 대하여 증명하는 기본 성질 가운데 하나이다. 이 성질은 선형성(linearity)과 함께 여러 고전적인 부등식의 원천이 된다. 그 가운데 하나가 적분 형태의 코시-슈바르츠(Cauchy–Schwarz) 부등식인데, 이는 제곱 $(f + tg)^2 \geq 0$을 적분한 뒤 여기서와 같은 판별식(discriminant) 논법을 쓰면 얻어진다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 바로 이런 관점에서 적분을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.