풀이

STEP II 2002, 문제 2

순수수학 • 상반방정식

> **STEP II 2002, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q2

핵심 아이디어

계수(coefficient)를 바깥쪽에서 안쪽으로 차례로 살펴보자. 1과 1, 그다음 5와 -5, 그리고 가운데에 4가 있다. 계수가 짝을 이루어 같거나 부호만 반대이면, 가운데 차수의 z 거듭제곱으로 나누었을 때 $z^k + z^{-k}$와 $z^k - z^{-k}$의 결합만 남고, 이들은 각각 $w = z - z^{-1}$에 대한 다항식(polynomial)이다. 그러면 차수가 절반으로 줄어든다. 8차방정식도 같은 구조를 가지며, 한 번 차수를 줄이고 나면 다시 같은 구조가 나타나므로 이 방법을 두 번 쓰게 된다.

풀이

사차방정식

상수항이 1이므로 $z = 0$은 근(root)이 아니다. 따라서 z^2으로 나눌 수 있다.

$$z^2 + 5z + 4 - 5z^{-1} + z^{-2} = 0, \qquad \text{즉,} \qquad \left(z^2 + z^{-2}\right) + 5\left(z - z^{-1}\right) + 4 = 0.$$

$w = z - z^{-1}$로 두면 $w^2 = z^2 - 2 + z^{-2}$이므로 $z^2 + z^{-2} = w^2 + 2$이다. 이를 대입하면

$$(w^2 + 2) + 5w + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad w^2 + 5w + 6 = 0,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다. 이 식은 $(w + 2)(w + 3) = 0$으로 인수분해(factorise)되므로 $w = -2$ 또는 $w = -3$이다.

z로 되돌아가기 위해 $z - z^{-1} = w$의 양변에 z를 곱하면

$$z^2 - wz - 1 = 0.$$

▶ $w = -2$: $z^2 + 2z - 1 = 0$이므로 $z = -1 \pm \sqrt{2}$이다.

▶ $w = -3$: $z^2 + 3z - 1 = 0$이므로 $z = \frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{13}\right)$이다.

이 서로 다른 네 값이 사차방정식(quartic)의 근이다.

$$z = -1 \pm \sqrt{2}, \qquad z = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

8차방정식

이번에도 $z = 0$은 근이 아니므로 z^4으로 나누고, 가운데를 중심으로 대칭인 계수끼리 짝을 짓는다.

$$2\left(z^4 + z^{-4}\right) - 3\left(z^3 - z^{-3}\right) - 12\left(z^2 + z^{-2}\right) + 12\left(z - z^{-1}\right) + 22 = 0.$$

(짝을 확인해 보자. z^8과 z^0은 모두 계수가 2이고, z^7은 -3, z^1은 $+3$이며, z^6과 z^2는 모두 -12이고, z^5는 12, z^3은 -12이다.)

각 괄호를 $w = z - z^{-1}$로 나타내야 한다. $z^2 + z^{-2} = w^2 + 2$는 이미 알고 있다. 세제곱하면

$$w^3 = z^3 - 3z + 3z^{-1} - z^{-3} \quad \Longrightarrow \quad z^3 - z^{-3} = w^3 + 3w,$$

이고, $z^2 + z^{-2}$를 제곱하면

$$z^4 + z^{-4} = \left(z^2 + z^{-2}\right)^2 - 2 = (w^2 + 2)^2 - 2 = w^4 + 4w^2 + 2.$$

이를 대입하면

$$\begin{aligned} 0 &= 2(w^4 + 4w^2 + 2) - 3(w^3 + 3w) - 12(w^2 + 2) + 12w + 22 \\ &= 2w^4 - 3w^3 - 4w^2 + 3w + 2. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** w에 대한 사차방정식이 남았다. 무언가 얻은 것이 있는가?

그렇다. 계수 2, -3, -4, 3, 2를 보자. 앞에서와 정확히 같은 패턴(바깥쪽 짝은 같고, 그다음 짝은 부호가 반대)이므로 한 단계 아래에서 같은 방법을 쓸 수 있다. $w = 0$은 근이 아니므로 w^2으로 나누면

$$2\left(w^2 + w^{-2}\right) - 3\left(w - w^{-1}\right) - 4 = 0.$$

$v = w - w^{-1}$로 두면 $w^2 + w^{-2} = v^2 + 2$이므로

$$2(v^2 + 2) - 3v - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2v^2 - 3v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v(2v - 3) = 0.$$

따라서 $v = 0$ 또는 $v = \frac{3}{2}$이다. 이제 $w^2 - vw - 1 = 0$을 이용해 거꾸로 풀어 나간다.

▶ $v = 0$: $w^2 = 1$이므로 $w = \pm 1$이다.

- $v = \frac{3}{2}$: $2w^2 - 3w - 2 = 0$, 즉 $(2w+1)(w-2) = 0$이므로 $w = 2$ 또는 $w = -\frac{1}{2}$이다.

마지막으로 $z^2 - wz - 1 = 0$을 이용해 한 번 더 되돌아간다.

- $w = 1$: $z^2 - z - 1 = 0$이므로 $z = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$이다.
- $w = -1$: $z^2 + z - 1 = 0$이므로 $z = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$이다.
- $w = 2$: $z^2 - 2z - 1 = 0$이므로 $z = 1 \pm \sqrt{2}$이다.
- $w = -\frac{1}{2}$: $2z^2 + z - 2 = 0$이므로 $z = \frac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{17}\right)$이다.

각 이차방정식 $z^2 - wz - 1 = 0$의 판별식(discriminant)은 $w^2 + 4 > 0$이므로 이 근들은 모두 실수이며, 여덟 개의 값은 서로 다르다. 8차 다항식은 근을 많아야 여덟 개 가지므로, 이것이 근 전부이다.

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad z = 1 \pm \sqrt{2}, \qquad z = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

검산

- $z^2 - wz - 1 = 0$에서 나온 각 근의 쌍은 곱이 -1이므로 계산을 빠르게 확인할 수 있다. 예를 들어 $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1$이다.
- 8차방정식에서 근의 합은 $\frac{3}{2}$(즉 z^7의 계수를 z^8의 계수로 나눈 값에 음의 부호를 붙인 것)이어야 한다. 네 쌍의 기여는 $1 - 1 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$이다. 맞다.
- 수치적으로 $z = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{17}) \approx 0.7808$을 대입하면 8차 다항식의 값이 10^{-9} 이내로 0이 되며, 나머지 일곱 근과 사차방정식의 네 근도 마찬가지이다.

흔한 실수

- $z^3 - z^{-3} = w^3$이라고 쓰는 것. 교차항에서 $3w$가 추가로 나온다.
- w에 대한 사차방정식에서 멈추고, 그 계수가 같은 대칭성을 가진다는 것을 알아차리지 못한 채 시행착오로 인수분해하려 하는 것.
- w(또는 v)의 값만 구하고 z로 되돌아가는 것을 잊는 것.

STEP 너머

계수를 거꾸로 읽어도 같은(또는 부호가 번갈아 바뀌는 것을 제외하면 같은) 다항식을 **상반**(reciprocal) 다항식 또는 **회문**(palindromic) 다항식이라고 한다. 이러한 다항식의 근은

$z \mapsto 1/z$ 또는 $z \mapsto -1/z$로 연결되는 쌍으로 나타나며, 여기서 쓴 치환(substitution)은 바로 이 대칭성이 허락하는 차수 줄이기이다. 갈루아(Galois) 이론에서는 이를 방정식이 근들의 어떤 변환군에 대해 불변이라는 관찰로 이해하며, 따라서 방정식을 더 작은 방정식들의 탑을 거쳐 단계적으로 풀 수 있다. 여기서 일어난 일이 바로 그것이다. 8차에서 4차로, 다시 2차로 내려갔다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 아이디어가 발전해 가는 모습을 보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.