풀이

STEP II 2002, 문제 11

역학 • 마찰과 한계 평형

> **STEP II 2002, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q11

핵심 아이디어

첫 부분은 질량중심(centre of mass)을 구하는 적분(integral)을 그대로 계산하면 된다. 치환(substitution) $t = x/l$을 쓰면 한 줄로 끝난다. 사다리 문제에서는 "양 끝에서 모두 미끄러지기 직전"이라는 조건 덕분에 네 접촉력이 모두 하나의 미지수의 배수가 된다. 따라서 두 방향으로 힘을 분해하고 A에 대한 모멘트(moment)를 구하면 곧바로 $\tan\theta$를 얻는다. 마지막 부분에는 아이디어가 하나 더 필요하다. 보는 가파르게 세울수록 더 안전하므로, "모든 $\theta < \pi/4$에서 미끄러진다"는 말은 한계각이 $\pi/4$ 이상이라는 뜻이다.

풀이

질량중심

B로부터 거리 x인 곳에 있는 길이 δx의 작은 조각의 무게는 $\alpha W l^{-1}(x/l)^{\alpha-1}\,\delta x$이다. $t = x/l$로 두면($\mathrm{d}x = l\,\mathrm{d}t$이다) 전체 무게는

$$\int_0^l \frac{\alpha W}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \alpha W\int_0^1 t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = W,$$

로 당연히 그래야 하는 값이 나온다($\alpha > 0$이므로 이 적분은 수렴(converge)한다). B에 대한 무게의 모멘트는

$$\int_0^l x\,\frac{\alpha W}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \alpha W l\int_0^1 t^{\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha W l}{\alpha+1}.$$

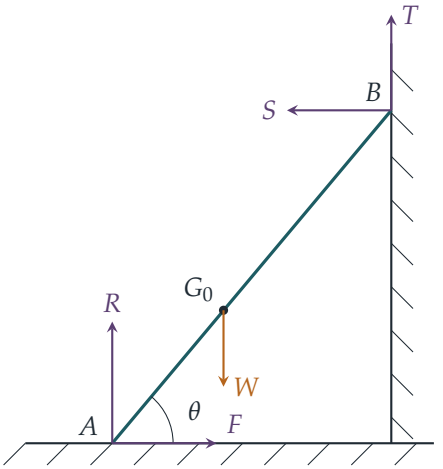
이를 W로 나누면 질량중심 G_0은 B로부터 거리 $\alpha l/(\alpha+1)$인 곳에 있으며, 이것이 보여야 할 결과이다. 따라서 G_0은 A로부터 거리

$$d = l - \frac{\alpha l}{\alpha+1} = \frac{l}{\alpha+1}$$

인 곳에 있고, A에 대한 모멘트를 구할 때 이 값을 쓴다.

양 끝에서의 한계 평형

보를 강체 막대(rigid rod)로, A와 B의 접촉을 거친 접촉으로 모형화한다. 보가 미끄러지면 A는 벽에서 멀어지고 B는 아래로 내려가므로, 마찰력(friction)은 A에서 벽 쪽으로, B에서 위쪽으로 작용한다. 바닥이 A에 작용하는 수직항력(normal reaction)을 R, 마찰력을 F라 하고, 벽이 B에 작용하는 수직항력을 S, 마찰력을 T라 하자. 무게는 A로부터 거리 $l/(\alpha+1)$인 G_0에 작용한다.



수평 방향과 수직 방향으로 힘을 분해하고, A에 대한 모멘트를 구하면 다음과 같다(무게는 A로부터 수평 거리 $d\cos\theta$에 작용하고, B는 높이 $l\sin\theta$, 수평 거리 $l\cos\theta$인 곳에 있다).

$$F = S,$$

$$R + T = W,$$

$$S\,l\sin\theta + T\,l\cos\theta = W\,\frac{l}{\alpha+1}\cos\theta.$$

양 끝에서 모두 한계 상태라는 것은 $F = \mu R$이고 $T = \mu S$라는 뜻이다. 그러면 $S = F = \mu R$, $T = \mu S = \mu^2 R$이고, 수직 방향의 식에서

$$R(1+\mu^2) = W, \qquad \text{따라서} \qquad S = \frac{\mu W}{1+\mu^2}, \quad T = \frac{\mu^2 W}{1+\mu^2}.$$

모멘트 식을 $l\cos\theta$로 나누고 대입하면

$$\frac{\mu W}{1+\mu^2}\tan\theta + \frac{\mu^2 W}{1+\mu^2} = \frac{W}{1+\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \mu\tan\theta = \frac{1+\mu^2}{1+\alpha} - \mu^2 = \frac{1-\alpha\mu^2}{1+\alpha},$$

즉

$$\tan\theta = \frac{1-\alpha\mu^2}{(1+\alpha)\mu},$$

이며, 이것이 보여야 할 결과이다. 이 각을 θ_0이라 하고 $t_0 = \tan\theta_0$이라 쓰자.

μ의 최댓값

> **생각해 보기** "모든 $\theta < \pi/4$에서 미끄러진다"는 말이 왜 θ_0에 대한 조건으로 바뀌는가?

평형이 가능한 것은 정확히 $\tan\theta \geq t_0$일 때임을 보이자. $t = \tan\theta$, $k = 1/(1+\alpha)$라 쓰면 모멘트 식은 $St + T = kW$가 된다. 마찰 법칙은 $F \leq \mu R$과 $|T| \leq \mu S$이다.

필요성(*necessity*). $T \leq \mu S$와 $S = F \leq \mu R = \mu(W - T)$로부터 $T \leq \mu^2(W - T)$를 얻으므로 $T \leq \mu^2 W/(1+\mu^2)$이다. 또 $S \leq \mu(W - T)$이므로

$$kW = St + T \leq \mu t(W - T) + T = \mu t W + (1 - \mu t)T.$$

$\mu t < 1$이면 T에 대한 위의 부등식(inequality)을 쓰면 $kW \leq W(\mu t + \mu^2)/(1+\mu^2)$를 얻고, 이를 정리하면 $t \geq t_0$이다. $\mu t \geq 1$이면 $\mu t_0 = (1 - \alpha\mu^2)/(1+\alpha) < 1$이므로 어차피 $t \geq 1/\mu > t_0$이다. 어느 경우든 평형이면 반드시 $t \geq t_0$이다.

충분성(*sufficiency*). $t \geq t_0$이면($t > 0$이기도 하다), 벽의 마찰을 한계 상태 $T = \mu S$로 잡고, 모멘트 식에서 $S = kW/(t+\mu)$로, 그리고 $F = S$, $R = W - T$로 둔다. 남은 조건은 $S \leq \mu R$ 하나뿐인데, 이는 $S(1+\mu^2) \leq \mu W$, 즉 $k(1+\mu^2) \leq \mu(t+\mu)$이고, 이것은 정확히 $t \geq t_0$이다. ($R > 0$도 성립한다.)

따라서 보가 각 θ에서 미끄러지는 것은 정확히 $\tan\theta < t_0$일 때이다. "모든 $\theta < \pi/4$에서 미끄러진다"는 것은 $t_0 \geq 1$이라는 뜻이다. $t_0 \geq 1$이면 모든 $\theta < \pi/4$에 대해 $\tan\theta < 1 \leq t_0$이고, $t_0 < 1$이면 $\max(t_0, 0) < \tan\theta < 1$인 각은 $\pi/4$보다 작은데도 평형을 이루기 때문이다.

$\alpha = \frac{3}{2}$일 때

$$t_0 = \frac{1 - \frac{3}{2}\mu^2}{\frac{5}{2}\mu} = \frac{2 - 3\mu^2}{5\mu} \geq 1 \iff 3\mu^2 + 5\mu - 2 \leq 0 \iff (3\mu - 1)(\mu + 2) \leq 0,$$

이다(양변에 $5\mu > 0$을 곱했다). $\mu + 2 > 0$이므로 이 부등식은 정확히 $\mu \leq \frac{1}{3}$일 때 성립한다. 가능한 최댓값은

$$\mu = \tfrac{1}{3}.$$

검산

- $\alpha = 1$이면 보는 균일하고, 공식은 $\tan\theta = (1 - \mu^2)/(2\mu)$가 된다. 이는 양 끝의 마찰계수(coefficient of friction)가 같은 균일한 사다리에 대해 잘 알려진 결과이다.
- $\mu = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{3}{2}$일 때 $t_0 = (2 - \frac{1}{3})/\frac{5}{3} = 1$로 정확히 맞으므로 한계각은 $\pi/4$이다. 수치로 확인하면 $\mu = 0.332$일 때 $t_0 \approx 1.004$이고, $\mu = 0.334$일 때 $t_0 \approx 0.996$이다.

- $\alpha \to \infty$이면 질량이 B에 집중되고($d \to 0$), 모든 $\mu > 0$에 대해 $\tan\theta$가 음수가 된다. 즉 보는 어떤 각으로도 서 있을 수 있는데, 이때 무게가 거의 벽에서 작용하므로 이치에 맞는다.

흔한 실수

- 모멘트 식에서 $\alpha l/(\alpha+1)$을 A로부터의 거리로 쓰는 것. 이 값은 B로부터 잰 거리이다.
- 벽의 마찰력을 아래쪽으로 두는 것. 보가 미끄러질 때 B는 아래로 내려가므로, B에서 보에 작용하는 마찰력은 위쪽이다.
- 마지막 부등식의 방향을 거꾸로 하는 것. 보는 **더 가파를수록** 안전하므로 "$\pi/4$보다 작은 각에서 미끄러진다"는 $\tan\theta_0 \geq 1$을 요구하고, μ가 최대일 때 θ_0은 정확히 $\pi/4$가 된다.

STEP 너머

위의 필요충분 논증은 사실 작은 **선형계획법**(*linear programming*) 문제이다. 마찰 법칙은 허용되는 힘들의 볼록 영역(convex region)을 정하고, 모멘트 직선이 이 영역과 만날 때 평형이 가능하다. 이 문제처럼 평형 방정식만으로는 힘이 정해지지 않는 부정정(statically indeterminate) 문제는 대학 1학년 역학과 공학에서 흔히 다루는 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰, 토크(torque), 강체 평형(rigid-body equilibrium)을 이와 같이 세심하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.