풀이

STEP II 2002, 문제 10

역학 • 운동학과 최적화

> **STEP II 2002, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q10

핵심 아이디어

전체 거리가 고정되어 있으므로 경주 시간 T와 속력을 바꾸는 시각 t는 하나의 방정식으로 묶여 있다. 분모를 없애면 이 방정식은 t에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 되고, 시간 T가 실제로 가능하려면 이 이차방정식이 실근을 가져야 한다. 판별식(discriminant) 조건에서 미적분 없이 곧바로 T의 최솟값을 얻는다. 둘째 부분에서는 두 선수의 위치를 시간의 함수로 알고 나면 둘 사이의 거리가 구간별 이차함수(piecewise quadratic)가 되므로, 늘 하던 방식대로 최댓값을 구하면 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 거리의 단위는 km, 시간의 단위는 시간이며, $42\frac{3}{8} = \frac{339}{8}$이다.

최소 경주 시간

첫째 선수는 처음 t시간 동안 $13t$를 달리고, 나머지 $T-t$시간 동안 $(14+\frac{2t}{T})(T-t)$를 달린다. 따라서

$$13t + \left(14 + \frac{2t}{T}\right)(T-t) = \frac{339}{8}.$$

전개하면 $13t + 14T - 14t + 2t - \dfrac{2t^2}{T} = \dfrac{339}{8}$, 즉

$$t + 14T - \frac{2t^2}{T} = \frac{339}{8}.$$

양변에 $T > 0$을 곱하고 t의 거듭제곱별로 정리하면

$$2t^2 - Tt + \left(\frac{339}{8}T - 14T^2\right) = 0. \qquad (*)$$

생각해 보기 가장 작은 T를 구하고 싶지만, T가 t의 함수로 주어져 있지 않다. 애초에 어떤 T 값이 가능한지 어떻게 알 수 있을까?

어떤 T 값이 나타나려면 $(*)$가 실수해 t를 가져야 하므로, 판별식이 음이 아니어야 한다.

$$T^2 - 8\left(\frac{339}{8}T - 14T^2\right) \geq 0 \iff 113T^2 - 339T \geq 0 \iff 113T(T-3) \geq 0.$$

$T > 0$이므로 $T \geq 3$이어야 한다.

이 하한은 실제로 달성된다. $T = 3$이면 판별식이 0이고 $(*)$는

$$2t^2 - 3t + \left(\frac{1017}{8} - 126\right) = 2t^2 - 3t + \frac{9}{8} = 2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 = 0,$$

이 되어 $t = \frac{3}{4}$이다. 이 값은 0과 T 사이에 있으므로 실제로 가능한 경주 계획이다. 곧 45분 동안 13의 속력으로 달린 다음, 나머지 $2\frac{1}{4}$시간 동안 $14 + \frac{2(3/4)}{3} = 14.5$의 속력으로 달린다. 실제로 $13 \cdot \frac{3}{4} + 14.5 \cdot \frac{9}{4} = 9.75 + 32.625 = 42.375$이다. 따라서 요구한 대로 T의 가능한 최솟값은 3이다.

(같은 결과를 다르게 얻을 수도 있다. $(*)$를 음함수 미분(implicit differentiation)하고 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0$으로 놓으면 $T = 4t$를 얻고, 이를 다시 대입하면 $T = 3$이 나온다. 판별식을 이용한 논증은 3이 단지 정류값(stationary value)이 아니라 전역 최솟값(global minimum)임까지 증명해 준다는 장점이 있다.)

최대 간격

출발한 뒤 지난 시간을 τ라 하자. 둘째 선수의 속력은 어떤 상수 k에 대하여 $16 - k\tau$이므로, 달린 거리는

$$s_2(\tau) = 16\tau - \tfrac{1}{2}k\tau^2.$$

이다. 3시간 만에 완주하므로 $48 - \frac{9}{2}k = \frac{339}{8}$이고, 따라서 $\frac{9}{2}k = \frac{45}{8}$, $k = \frac{5}{4}$이다. 그러므로 $s_2 = 16\tau - \frac{5}{8}\tau^2$이고, 속력은 16에서 12.25로 줄어들며 계속 양수이다.

첫째 선수도 3시간이 걸리므로, 첫째 부분에 따라 $t = \frac{3}{4}$이다. 이 선수가 달린 거리는

$$s_1(\tau) = \begin{cases} 13\tau, & 0 \leq \tau \leq \frac{3}{4}, \\ \frac{39}{4} + \frac{29}{2}(\tau - \frac{3}{4}), & \frac{3}{4} \leq \tau \leq 3. \end{cases}$$

이다. $d = s_2 - s_1$이라 하자. 둘째 선수가 처음에 더 빠르므로 $d \geq 0$일 것으로 예상된다.

$0 \leq \tau \leq \frac{3}{4}$일 때: $d = 3\tau - \frac{5}{8}\tau^2$이고 $\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\tau} = 3 - \frac{5}{4}\tau > 0$이다. 따라서 이 구간에서 d는 증가하며, $d(\frac{3}{4}) = \frac{9}{4} - \frac{45}{128} = \frac{243}{128}$에 이른다.

$\frac{3}{4} \leq \tau \leq 3$일 때:

$$d = 16\tau - \tfrac{5}{8}\tau^2 - \tfrac{39}{4} - \tfrac{29}{2}\tau + \tfrac{87}{8} = \tfrac{1}{8}(9 + 12\tau - 5\tau^2) = \tfrac{1}{8}(3-\tau)(3+5\tau).$$

이것은 아래로 볼록한 포물선(parabola)이 아니라 위로 열린 모양이 아닌, 아래로 열린 포물선이고, 꼭짓점(vertex)은 $\tau = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$로서 $[\frac{3}{4}, 3]$ 안에 있다. (같은 말이지만, 간격은 두 속력이 같아질 때 더 이상 늘어나지 않는다. 곧 $16 - \frac{5}{4}\tau = 14.5$일 때이다.) 이때

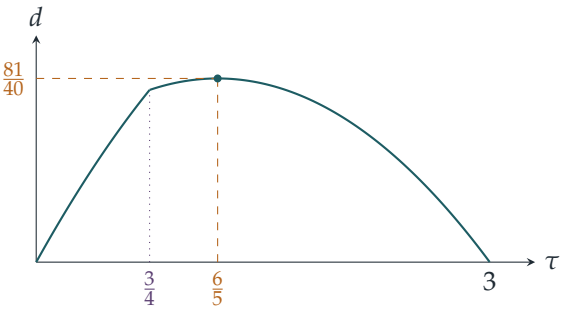
$$d\left(\tfrac{6}{5}\right) = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{9}{5} \cdot 9 = \tfrac{81}{40}.$$

인수분해한 꼴을 보면 이 구간 전체에서 $d \geq 0$이고, 당연히 그래야 하듯 결승점에서 0으로 줄어든다.

두 구간을 비교하면 $\frac{81}{40} = 2.025 > \frac{243}{128} \approx 1.898$이다. 따라서 두 선수 사이의 최대 거리는

$$\boxed{\tfrac{81}{40}\ \text{km} = 2.025\ \text{km}},$$

이고, 경주 시작 후 1.2시간(72분)에 둘째 선수가 앞선 상태에서 이 값에 이른다.



검산

- 두 선수 모두 $\tau = 3$에 결승점에 도착하며, 공식도 당연히 그래야 하듯 $d(3) = 0$을 준다.
- 둘째 구간의 최댓값은 정확히 두 속력이 같아질 때(둘 다 14.5) 나타나는데, 이는 간격이 더 이상 늘어나지 않는 자연스러운 조건이다.
- 수치 계산: t의 촘촘한 격자에서 T에 대한 이차방정식을 풀면 가장 작은 T는 $t = 0.75$에서 3.000이고, $[0, 3]$의 300 000개 시각에서 d를 계산하면 $\tau = 1.2$에서 최댓값 2.025를 얻으며 전 구간에서 $d \geq 0$이다.

흔한 실수

- 첫째 선수의 최소 시간 계획을 쓰면서, "달린 시간이 3시간"이라는 조건이 바로 $t = \frac{3}{4}$를 정해 준다는 점을 알아차리지 못하는 것.
- 꺾이는 점 $\tau = \frac{3}{4}$에서만 최댓값을 찾는 것: 둘째 선수는 $\tau = \frac{6}{5}$까지 여전히 14.5보다 빠르므로, 속력을 바꾼 뒤에도 간격은 계속 늘어난다.

- 일차적으로 감소하는 속력을 적분할 때 생기는 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리고 둘째 선수의 거리를 $16\tau - k\tau^2$으로 쓰는 것.

STEP 너머

첫째 부분은 $F(t, T) = 0$으로 음함수 꼴로 주어진 제약 조건 아래에서의 최적화 문제이다. "어떤 T에 대하여 해 t가 존재하는가?"라고 묻는 것은 음함수 정리(implicit function theorem), 더 일반적으로는 라그랑주 승수(Lagrange multipliers)의 바탕에 있는 생각이다. 최적점에서 제약 조건의 등위곡선(level curve)은 $\partial F/\partial t = 0$을 만족하는데, 이것이 바로 여기서의 중근(double root) 조건이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 운동학(kinematics)을 처음부터 끝까지 미적분으로 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 STEP 스타일의 최적화 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.