풀이

# STEP II 2002, 문제 1

순수수학 • 치환적분

**STEP II 2002, 1번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s2-q1

## 핵심 아이디어

배각 공식(double-angle formula)을 쓰면 $1-\cos 2\theta$가 $2\sin^2\theta$로 바뀌고, $\operatorname{cosec}^2\theta$는 보자마자 적분할 수 있는 함수이다. 제시된 치환(substitution) $x=\sin 2\theta$는 $\sqrt{1-x^2}$가 $\cos 2\theta$가 되도록 고안된 것으로, 이 치환을 하면 두 번째 적분이 첫 번째 적분으로 되돌아온다. 마지막 적분에서는 적분 구간의 끝값 1과 $2/\sqrt{3}$이 끝값 1과 $\sqrt{3}/2$의 역수이므로, $y=1/x$를 시도해 보라는 강한 암시가 된다.

## 풀이

### 첫 번째 적분

$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$이므로 $1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta$이고, 이 값은 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$에서 양수이므로 피적분함수(integrand)는 이 구간에서 문제없이 정의된다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cot\theta) = -\operatorname{cosec}^2\theta$를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{cosec}^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\Big[-\cot\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\cot\tfrac{\pi}{6} - \cot\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2},\end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

### 두 번째 적분

$x=\sin 2\theta$로 놓으면 $\mathrm{d}x = 2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$이다. $\theta=\frac{1}{6}\pi$일 때 $x=\sin\frac{1}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고, $\theta=\frac{1}{4}\pi$일 때 $x=\sin\frac{1}{2}\pi=1$이다. $\theta$가 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$를 움직이는 동안 $x$는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 1까지 계속 증가한다.

**생각해 보기** $\sqrt{1-x^2}$는 $\cos 2\theta$와 같은가, 아니면 $-\cos 2\theta$와 같은가?

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta} = |\cos 2\theta|$이다. 우리가 다루는 범위에서는 $2\theta \in [\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi]$이고 여기서 $\cos 2\theta \geq 0$이므로 $\sqrt{1-x^2} = \cos 2\theta$이다. 따라서

$$\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

첫 번째 적분을 끌어들이기 위해 분자를 분모로 나타내면

$$\frac{\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta} = \frac{1-(1-\cos 2\theta)}{1-\cos 2\theta} = \frac{1}{1-\cos 2\theta} - 1.$$

그러므로 첫 번째 결과를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta - 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} 1\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

### 마지막 적분

$y = 1/x$로 놓으면 $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x/x^2$이다. $y = 1$일 때 $x = 1$이고, $y = 2/\sqrt{3}$일 때 $x = \sqrt{3}/2$이다. 이 범위에서 $x > 0$이므로

$$\sqrt{y^2-1} = \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$y\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$$

**생각해 보기** $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x/x^2$에서 나온 음의 부호는 어디로 가는가?

치환을 하면 적분 구간의 끝값 순서가 뒤바뀌고, 이를 다시 바꾸어 놓으면 음의 부호가 흡수된다.

$$\begin{aligned}\int_{1}^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{y\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)}\,\mathrm{d}y &= \int_{1}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

$x^2$인 인수들이 정확히 약분되는데, 바로 이 때문에 분모에 $y$라는 인수가 추가로 들어가 있었던 것이다.

## 검산

- 두 번째와 세 번째 적분의 피적분함수는 모두 양수이므로 답도 양수여야 한다. 실제로 $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6} \approx 0.73205 - 0.52360 = 0.20845$이다.
- 세 적분 각각에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 첫 번째 적분은 $0.366025\ldots$($\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$와 일치)이고, 두 번째와 세 번째 적분은 $0.208452\ldots$($\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6}$와 일치)이다.
- 대략적인 어림: 두 번째 적분에서 구간의 길이는 $1-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.134$이고 피적분함수는 $2(x=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서)부터 $1(x=1$에서)까지 줄어들므로, 적분값은 0.134와 0.268 사이에 있어야 한다. 실제로 그렇다.

## 흔한 실수

- 범위에서 $\cos 2\theta$의 부호를 확인하지 않고 $\sqrt{1-\sin^2 2\theta} = \cos 2\theta$라고 쓰는 것.
- 적분 구간의 끝값을 바꾸는 것을 잊거나, $y = 1/x$로 끝값의 순서가 뒤바뀔 때 음의 부호를 놓치는 것.
- $\left[-\cot\theta\right]$를 $\cot\frac{\pi}{4} - \cot\frac{\pi}{6}$로 계산하는 것. 이렇게 하면 크기는 맞지만 부호가 틀린다.

## STEP 너머

마지막 부분은 일반적인 원리의 작은 예이다. 치환은 변수 변환(change of variables)으로, 한 적분을 다른 적분으로 정확히 옮겨 놓을 수 있으며, 적분 구간의 끝값이 서로 역수임을 알아차리면 $y = 1/x$가 그 역할을 해 줄 것이라는 믿을 만한 단서가 된다. 대학의 첫 해석학(analysis) 강좌에서는 치환적분을 연쇄 법칙(chain rule)과 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)로부터 엄밀하게 정당화하며, 이때 치환이 단조(monotonic)인 범위와 피적분함수가 연속(continuous)인 범위에 주의를 기울이는데, 이는 바로 여기서 우리가 확인한 조건들이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이러한 계산 뒤에 있는 이론을 명료하게 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.