풀이

STEP I 2002, 문제 9

역학 • 경사면에서의 넘어짐

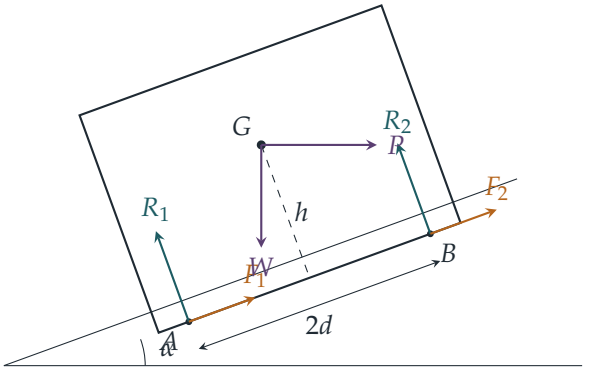
> **STEP I 2002, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q9

핵심 아이디어

트럭은 평형(equilibrium) 상태에 있는 강체(rigid body)이므로 세 개의 방정식을 얻는다. 경사면을 따라 힘을 분해하고(resolve), 경사면에 수직인 방향으로 분해하고, 모멘트(moment)를 취한다. G에 대한 모멘트를 취하는 것이 영리한 선택인데, 무게와 P가 모두 G를 지나므로 식에서 사라지고 바퀴에 작용하는 힘만 남기 때문이다. 이 하나의 방정식이 수직항력(normal reaction)의 차와 마찰력(friction)의 합을 연결하며, 거의 모든 일을 해준다. 그러면 "넘어지지 않는다"는 것은 단순히 어느 수직항력도 음수가 아니라는 뜻이 된다.

풀이

트럭을 바퀴가 경사면의 두 점 A(낮은 쪽)와 B(높은 쪽)에서 경사면에 닿는 강체로 모형화한다. 두 점 사이의 거리는 $2d$이다. A에서의 수직항력을 R_1, B에서의 수직항력을 R_2라 하고, 마찰력을 F_1과 F_2라 하자. 마찰력은 둘 다 경사면 **위쪽**을 양의 방향으로 잡는다(어느 쪽이든 음수로 나올 수 있다). 마찰력은 미끄러짐을 막을 만큼 충분히 크다고 가정한다. 이 문제는 오직 넘어짐에 관한 것이다. 그림에서처럼 P는 경사면 쪽을 향하는 수평 방향의 힘이므로, 경사면 위쪽 방향으로 $P\cos\alpha$, 경사면 안쪽 방향으로 $P\sin\alpha$의 성분을 가진다.



경사면에 수직인 방향과 경사면을 따르는 방향(경사면 위쪽이 양)으로 힘을 분해하면 다음과 같다.

$$R_1 + R_2 = W\cos\alpha + P\sin\alpha, \tag{1}$$

$$F_1 + F_2 = W\sin\alpha - P\cos\alpha. \tag{2}$$

이제 G에 대한 모멘트를 취한다. 무게와 P는 G를 지나며 작용하므로 아무 기여도 하지 않는다. 각 수직항력은 G로부터 수직 거리 d인 곳에 작용하고, 각 마찰력은 경사면을 따라 G로부터 수직 거리 h인 곳에 작용한다. 반시계 방향을 양으로 잡으면(그림에서처럼 경사면이 오른쪽으로 올라가는 경우), R_2는 트럭을 G에 대해 반시계 방향으로 돌리고, R_1은 시계 방향으로 돌리며, G 아래에서 경사면 위쪽으로 작용하는 마찰력은 반시계 방향으로 돌린다. 따라서

$$d(R_2 - R_1) + h(F_1 + F_2) = 0. \tag{3}$$

소문항 (i)

$R_1 = R_2$이면 식 (3)은 $h(F_1 + F_2) = 0$이 된다. $h > 0$이므로 $F_1 + F_2 = 0$이다. 즉 마찰력의 합은 0이고, 이것이 보이려던 것이다.

((2)에 의해 이는 정확히 $P = W\tan\alpha$일 때 일어난다. P의 경사면 위쪽 성분이 무게의 경사면 아래쪽 성분과 정확히 균형을 이루므로, 경사면이 알짜 마찰력을 제공할 필요가 없다.)

소문항 (ii)

(2)를 (3)에 대입하면

$$R_2 - R_1 = \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha),$$

이고, 이를 (1)과 결합하면

$$2R_1 = W\cos\alpha + P\sin\alpha - \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha),$$

$$2R_2 = W\cos\alpha + P\sin\alpha + \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha).$$

? 생각해 보기 "넘어지지 않는다"는 것은 이 방정식들로 보면 무슨 뜻인가?

지면은 바퀴를 밀 수는 있지만 당길 수는 없으므로, 각 수직항력은 $R \geq 0$을 만족해야 한다. 만약 R_2에 대한 식이 음수로 나온다면 높은 쪽 바퀴를 아래로 붙잡아 두어야 한다는 뜻인데, 실제로는 바퀴가 들리고 트럭은 A를 중심으로 회전한다. 마찬가지로 $R_1 < 0$은 B를 중심으로 한 회전을 뜻한다. 따라서 트럭은 정확히 $R_1 \geq 0$이고 $R_2 \geq 0$일 때 똑바로 서 있다.

이하에서는 $\frac{d}{h} = \tan\beta, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 그리고 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$를 사용한다.

높은 쪽 바퀴가 지면에 붙어 있는 조건$(R_2 \geq 0)$. $2R_2 \geq 0$에 $d/h > 0$을 곱하면

$$\tan\beta\,(W\cos\alpha + P\sin\alpha) + P\cos\alpha - W\sin\alpha \geq 0.$$

$\cos\beta > 0$을 곱하고 항을 정리하면

$$P(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \geq W(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta),$$

즉

$$P\cos(\alpha-\beta) \geq W\sin(\alpha-\beta).$$

$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos(\alpha-\beta) > 0$이고, 따라서 부등호 방향을 바꾸지 않고 이것으로 나눌 수 있다.

$$P \geq W\tan(\alpha-\beta).$$

낮은 쪽 바퀴가 지면에 붙어 있는 조건$(R_1 \geq 0)$. 같은 방법으로 $2R_1 \geq 0$으로부터

$$\tan\beta\,(W\cos\alpha + P\sin\alpha) - P\cos\alpha + W\sin\alpha \geq 0,$$

을 얻고, $\cos\beta > 0$을 곱하면

$$P(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \leq W(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta),$$

즉

$$P\cos(\alpha+\beta) \leq W\sin(\alpha+\beta).$$

$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$라면(주어진 답은 이를 암묵적으로 가정하고 있다. 그렇지 않으면 $\tan(\alpha+\beta)$가 음수이거나 정의되지 않기 때문이다) $\cos(\alpha+\beta) > 0$이고, 나누면

$$P \leq W\tan(\alpha+\beta).$$

반대로 $\alpha + \beta \geq \frac{\pi}{2}$이면, $P \geq 0$일 때 좌변은 ≤ 0이고 우변은 양수이므로, 경사면 쪽을 향하는 수평 방향의 힘은 아무리 커도 트럭을 높은 쪽 바퀴를 넘어 넘어뜨릴 수 없다.

두 조건을 합하면, 트럭이 넘어지지 않을 필요충분조건은

$$W\tan(\alpha-\beta) \leq P \leq W\tan(\alpha+\beta),$$

이며, 이것이 보이려던 결과이다. 미는 힘이 너무 작으면 트럭은 A를 중심으로 경사면 아래쪽으로 넘어지고, 너무 크면 B를 중심으로 경사면 위쪽으로 밀려 넘어진다.

검산

- **기하학적 그림.** 무게와 P는 G를 지나는 하나의 힘으로 합쳐지며, 이 힘은 연직 방향과 각 θ를 이루고 $\tan\theta = P/W$이다. 이 합력이 바퀴의 접촉점을 지날 때 트럭은 막 넘어지려 한다. 직선 GA는 경사면의 법선과 각 β를 이루고, 법선은 연직 방향과 각 α를 이루므로, 합력은 $\theta = \alpha - \beta$일 때 A를 지나고 $\theta = \alpha + \beta$일 때 B를 지난다. 이것이 정확히 두 끝점이다.
- **경사가 없는 경우.** $\alpha = 0$이면 조건은 $|P| \le Wd/h$가 된다. 이는 평평한 지면 위의 상자가 높이 h에서 옆으로 미는 힘을 받을 때 넘어지지 않을 익숙한 조건이다.
- **수치.** $W = 3, \alpha = 0.4, d = 1, h = 1.5$이면 구간은 $-0.571 \le P \le 4.551$이다. 20 000개의 무작위 설정에 대해 $R_1, R_2 \ge 0$을 이 구간과 직접 비교해 보았더니 완전히 일치했으며, 아래쪽 끝에서는 $R_2 = 0$, 위쪽 끝에서는 $R_1 = 0$이었다.

흔한 실수

- G 대신 바퀴에 대한 모멘트를 취하는 것. 그렇게 해도 되지만, 그러면 무게와 P의 모멘트 팔이 다루기 까다로워지고 부호 오류가 생기기 쉽다.
- 마찰력이 G에 대해 모멘트를 가진다는 것을 잊는 것. 마찰력은 경사면, 즉 G보다 거리 h만큼 아래에서 작용하며, 바로 여기서 h가 답에 들어온다.
- $\cos(\alpha \pm \beta)$의 부호를 확인하지 않고 나누는 것. 부등호의 방향을 결정하는 것이 바로 이 부호이다.

STEP 너머

바퀴와 지면 사이의 마찰력은 **부정정**(*statically indeterminate*)이다. 평형 조건은 $F_1 + F_2$만 정해 줄 뿐 F_1과 F_2를 따로 정해 주지는 않으며, 그 배분을 알아내려면 타이어가 어떻게 변형되는지에 대한 모형이 필요하다. 공학자들은 엄밀히 필요한 것보다 더 많은 지지점을 가진 구조물에서 이런 상황을 늘 마주한다. 위의 기하학적 검산은 **합력의 작용선**(*line of action of the resultant*)과 지지 다각형(support polygon)이라는 개념이며, 이는 보행 로봇과 쌓아 올린 블록의 안정성의 바탕이 되기도 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 정역학을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.