풀이

STEP I 2002, 문제 8

순수수학 • 복리 대출

> **STEP I 2002, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q8

핵심 아이디어

한 해 동안 일어나는 일을 식으로 써 보자. 빚은 $1+\alpha$배로 늘어나고, 그다음 상환액이 빠진다. 이 한 단계짜리 점화식(recurrence)을 거슬러 풀어 보면, 각 상환액 R_k는 n년째 말에 $(1+\alpha)^{n-k}R_k$만큼의 "가치"를 가진다는 것을 알 수 있다. 그만큼의 이자가 쌓이는 것을 막아 주었기 때문이다. 나머지는 모두 등비급수(geometric series)이다. 마지막 근삿값을 구할 때는 이항정리(binomial theorem)로 $1+\alpha$의 거듭제곱을 전개하되, 꼭 필요한 만큼의 항만 남긴다.

풀이

C_{n+1}에 대한 일반 공식

k년째 말에 이자가 붙으면 빚 C_k는 $(1+\alpha)C_k$가 되고, 그다음 R_k를 갚는다. 남은 금액이 $k+1$년째 초의 빚이다.

$$C_{k+1} = (1+\alpha)C_k - R_k.$$

이 식을 반복해서 적용하면

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= (1+\alpha)C_n - R_n \\ &= (1+\alpha)^2 C_{n-1} - (1+\alpha)R_{n-1} - R_n \\ &\vdots \\ &= (1+\alpha)^n C_1 - (1+\alpha)^{n-1}R_1 - (1+\alpha)^{n-2}R_2 - \cdots - R_n, \end{aligned}$$

이고, $C_1 = C$이므로

$$\boxed{C_{n+1} = (1+\alpha)^n C - \sum_{k=1}^{n} (1+\alpha)^{n-k} R_k}.$$

이다. (이를 엄밀하게 보이려면, $n = 1$일 때 성립함, 즉 $C_2 = (1+\alpha)C - R_1$임을 확인하고, n일 때 성립하면 양변에 $1+\alpha$를 곱하고 R_{n+1}을 빼서 $n+1$일 때도 성립함을 보이면 된다.)

상환액 $R_k = (1+\alpha)^k r$

N년 만에 대출을 모두 갚는다는 것은 $C_{N+1} = 0$이라는 뜻이다. $R_k = (1+\alpha)^k r$이면 합의 모든 항이 같다.

$$(1+\alpha)^{N-k} R_k = (1+\alpha)^{N-k}(1+\alpha)^k r = (1+\alpha)^N r.$$

따라서

$$0 = C_{N+1} = (1+\alpha)^N C - N(1+\alpha)^N r = (1+\alpha)^N (C - Nr).$$

$(1+\alpha)^N \neq 0$이므로 $C = Nr$, 즉 $r = C/N$을 얻는다. 이것이 보이려던 결과이다.

이는 직관적으로도 자연스럽다. k번째 상환액은 "현재 가치로" C/N이고 여기에 k년 치 이자가 붙은 것이므로, 전체적으로 원금 C와 그에 대한 이자를 정확히 갚는 셈이다.

균등 상환액 R

이제 모든 k에 대해 $R_k = R$이고, $C_{N+1} = 0$에서

$$(1+\alpha)^N C = R \sum_{k=1}^{N} (1+\alpha)^{N-k} = R(1 + (1+\alpha) + \cdots + (1+\alpha)^{N-1}).$$

를 얻는다. 괄호 안은 첫째항이 1, 공비가 $1+\alpha$, 항의 개수가 N인 등비급수이므로 ($\alpha > 0$이라 공비가 1이 아니다) 그 값은

$$\frac{(1+\alpha)^N - 1}{(1+\alpha) - 1} = \frac{(1+\alpha)^N - 1}{\alpha}.$$

이다. 따라서 $(1+\alpha)^N C = R\,\dfrac{(1+\alpha)^N - 1}{\alpha}$이고, 이를 정리하면

$$\frac{R}{C} = \frac{\alpha(1+\alpha)^N}{(1+\alpha)^N - 1},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

$\alpha = \frac{1}{50}, N = 4$인 경우

> **생각해 보기** 이항전개에서 항을 몇 개까지 남겨야 할까? 그리고 왜 분자는 분모보다 적은 항만 있어도 될까?

분모 $(1+\alpha)^4 - 1$은 α의 1차항부터 시작하지만, 분자 $\alpha(1+\alpha)^4$는 1로 시작하는 식에 α를 곱한 것이다. 그래서 공통인수 α를 약분하면 분자는 $(1+\alpha)^4$, 분모는 $((1+\alpha)^4 - 1)/\alpha$가 된다. 둘 다 α의 1차까지 정확하게 하려면 분자에서는 $(1+\alpha)^4 \approx 1 + 4\alpha$이면 충분하지만, 분모에서는 $(1+\alpha)^4 \approx 1 + 4\alpha + 6\alpha^2$까지 필요하다($6\alpha^2$은 α로 나누면 6α가 된다). 따라서

$$\frac{R}{C} = \frac{(1+\alpha)^4}{((1+\alpha)^4 - 1)/\alpha} = \frac{1 + 4\alpha + 6\alpha^2 + \dots}{4 + 6\alpha + 4\alpha^2 + \alpha^3} \approx \frac{1 + 4\alpha}{4 + 6\alpha}.$$

$\alpha = \frac{1}{50}$을 대입하면

$$\frac{R}{C} \approx \frac{1 + \frac{4}{50}}{4 + \frac{6}{50}} = \frac{54}{206} = \frac{27}{103},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 버린 항들의 상대적인 크기는 대략 α^2 정도로, 여기서는 1퍼센트에도 한참 못 미친다.

검산

- $N = 1$이면 공식은 $R/C = 1 + \alpha$를 준다. C를 빌려서 1년 치 이자와 함께 갚는 것이므로 맞다.
- $\alpha \to 0$이면 $(1+\alpha)^N - 1 \approx N\alpha$이므로 $R/C \to 1/N$이다. 이자가 없으면 매년 C/N씩 갚으면 된다. 이는 $r = C/N$과도 일치한다.
- 정확한 값은 $R/C = \frac{6765201}{25760050} \approx 0.26262$이고, $27/103 \approx 0.26214$이므로 둘의 차이는 약 0.2%이다. $R = 0.26262\,C$로 놓고 빚을 한 해씩 계산해 나가면, 4년 뒤에는 (반올림 오차를 제외하면) 남은 빚이 없다.

흔한 실수

- 합에서 지수를 잘못 쓰는 것: R_k는 k년째 말에 갚으므로, 이후 $n - k + 1$년이 아니라 $n - k$년 동안의 이자를 막아 준다.
- 분모에서도 $(1+\alpha)^4 \approx 1 + 4\alpha$로 근사하는 것: 그러면 $R/C \approx 27/100$이라는 더 거친 답이 나와 주어진 결과와 맞지 않는다.

STEP 너머

$\sum(1+\alpha)^{-k}R_k$라는 양은 상환액들의 **현재 가치**(*present value*)이며, 상환액의 현재 가치가 빌린 금액과 같아지는 바로 그때 대출이 청산된다. R에 대한 공식은 표준적인 연금(주택담보대출) 공식(annuity formula)이다. $C_{k+1} = (1+\alpha)C_k - R_k$와 같은 점화식은 1계 선형 차분방정식(first-order linear difference equation)으로, 미분방정식 $y' = \alpha y - R(t)$의 이산적인 사촌이며 같은 "적분인자(integrating factor)" 아이디어로 풀린다. 이처럼 대수와 모델링이 어우러진 문제를 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.