풀이

# STEP I 2002, 문제 7

순수수학 • 삼각함수의 적분

**STEP I 2002, 7번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s1-q7

## 핵심 아이디어

$I$와 $J$는 각각 따로 보면 다루기 쉬워 보이지 않지만, 그 합과 차는 둘 다 쉽다. 두 적분을 더하면 분자에 분모가 그대로 올라오므로 피적분함수(integrand)가 1이 된다. 두 적분을 빼면 분자에 분모의 **도함수**(*derivative*)가 올라오므로 적분값이 로그(logarithm)가 된다. 뒤의 두 적분도 같은 요령을 더 일반적인 형태로 사용한다. 즉, 분자를 분모의 상수배와 분모의 도함수의 상수배의 합으로 나눈다.

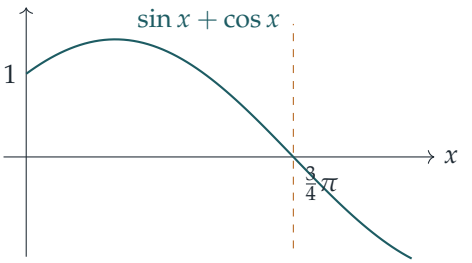
## 풀이

### 주 결과

먼저, $a$에 왜 제한이 있을까? 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right),$$

이 값은 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$에서 양수이고 $x = \frac{3}{4}\pi$에서 처음으로 0이 된다. 따라서 $0 \le a < \frac{3}{4}\pi$이면 분모는 $[0, a]$ 전체에서 양수이다. 그러면 두 적분 모두 아무 문제 없는 보통의 적분이 되고, 아래에 나오는 로그도 양수의 로그가 된다.



두 적분을 더하면

$$I + J = \int_0^a \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x = a.$$

두 적분을 빼면

$$I - J = \int_0^a \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

분자 $\cos x - \sin x$는 분모 $\sin x + \cos x$의 도함수와 정확히 같으므로, 피적분함수는 $[0, a]$에서 $f > 0$인 $f'(x)/f(x)$ 꼴이다. 따라서

$$I - J = \Big[\ln(\sin x + \cos x)\Big]_0^a = \ln(\sin a + \cos a) - \ln 1 = \ln(\sin a + \cos a).$$

두 결과를 더하면

$$2I = a + \ln(\sin a + \cos a),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (두 결과를 빼면 덤으로 $2J = a - \ln(\sin a + \cos a)$도 얻는다.)

### 소문항 (i)

$p, q > 0$이고, $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $\sin x$와 $\cos x$는 모두 음이 아니며 동시에 0이 되는 일이 없으므로, 분모 $D(x) = p\sin x + q\cos x$는 이 구간에서 양수이다. 그 도함수는 $D'(x) = p\cos x - q\sin x$이다.

> **생각해 보기** 분모의 계수가 $p$와 $q$일 때, "$I + J$와 $I - J$를 생각한다"는 방법을 어떻게 일반화할 수 있을까?

앞에서 합과 차가 통했던 것은, 분자들을 더하면 분모가 되고 빼면 분모의 도함수가 되었기 때문이다. 그래서 이번에는 다음을 만족하는 상수 $A$와 $B$를 찾는다.

$$\cos x = A\,(p\sin x + q\cos x) + B\,(p\cos x - q\sin x) \qquad \text{모든} x.$$

$\sin x$와 $\cos x$의 계수를 비교(comparing coefficients)하면

$$pA - qB = 0, \qquad qA + pB = 1.$$

첫째 식에서 $B = pA/q$이고, 이를 둘째 식에 넣으면 $qA + p^2A/q = 1$이므로

$$A = \frac{q}{p^2 + q^2}, \qquad B = \frac{p}{p^2 + q^2}.$$

이제 적분은 쉬운 부분과 로그 부분으로 나뉜다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{p\sin x + q\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \left(A + B\,\frac{D'(x)}{D(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}A + B\Big[\ln D(x)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}A + B\ln\frac{p}{q},\end{aligned}$$

여기서 둘 다 양수인 $D(\frac{\pi}{2}) = p$와 $D(0) = q$를 사용하였다. 따라서

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{p\sin x + q\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{\frac{1}{2}\pi q + p\ln(p/q)}{p^2+q^2}.$$

**소문항 (ii)**

이번에는 분모가 $D(x) = 3\sin x + 4\cos x + 25$이고 $D'(x) = 3\cos x - 4\sin x$이다. $|3\sin x + 4\cos x| \le 5 < 25$이므로 분모는 양수이다. $D$에 상수 25가 있으므로 상수항까지 맞춰야 한다. 그래서 다음을 만족하는 $A$와 $B$를 찾는다.

$$\cos x + 4 = A\,(3\sin x + 4\cos x + 25) + B\,(3\cos x - 4\sin x).$$

계수를 비교하면

$$\sin x:\ 3A - 4B = 0, \qquad \cos x:\ 4A + 3B = 1, \qquad \text{상수항}:\ 25A = 4.$$

처음 두 식에서 $A = \frac{4}{25}$, $B = \frac{3}{25}$를 얻고, 이때 상수항에 대한 식 $25\cdot\frac{4}{25} = 4$도 성립한다. 식은 세 개인데 미지수는 두 개뿐이므로 이것이 저절로 성립하는 것은 아니다. 분자의 "+4"는 바로 이것이 성립하도록 고른 것이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + 4}{3\sin x + 4\cos x + 25}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{4}{25} + \frac{3}{25}\frac{D'(x)}{D(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{25}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{25}\Big[\ln D(x)\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2\pi}{25} + \frac{3}{25}\ln\frac{28}{29},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $D(\frac{\pi}{2}) = 3 + 25 = 28$, $D(0) = 4 + 25 = 29$이다.

## 검산

- $p = q = 1$일 때 소문항 (i)은 $a = \frac{\pi}{2}$에서의 주 결과와 일치해야 한다. 주 결과에서 $2I = \frac{\pi}{2} + \ln 1$이므로 $I = \frac{\pi}{4}$이다. 공식은 $\frac{\pi/2+0}{2} = \frac{\pi}{4}$를 준다. 일치한다.
- $a \to \frac{3}{4}\pi$이면 $\ln(\sin a + \cos a) \to -\infty$이다. 이는 분모가 0이 되기 직전에 $I$의 피적분함수가 절댓값이 큰 음수가 된다는 사실과 맞는다. 그 근처에서 $\cos x < 0$이기 때문이다.
- 수치적으로 소문항 (ii)의 값은 $\frac{2\pi}{25} + \frac{3}{25}\ln\frac{28}{29} \approx 0.247116$이며, 이 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용한 값과 소수점 아래 열두 자리까지 일치한다. 주 결과와 소문항 (i)도 각각 무작위로 고른 200개의 $a$ 값, 그리고 $p$와 $q$ 값에 대해 수치 적분(quadrature) 결과와 일치한다.

## 흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $\ln(p/q)$ 대신 $\ln(q/p)$를 얻는 실수. 위끝 $\frac{\pi}{2}$에서 남는 것은 sin 항이므로 $p$가 나온다.
- 소문항 (ii)에서 상수항을 잊고 $\sin x$와 $\cos x$의 계수만 맞추는 실수. 마침 이 경우에는 잘 되지만, 그렇다고 가정하지 말고 확인해야 한다.

## STEP 너머

분자를 "분모의 $A$배와 분모의 도함수의 $B$배의 합"으로 쓰는 것은 작은 선형대수(linear algebra)이다. 함수 $\sin x$와 $\cos x$는 2차원 공간을 생성(span)하고, $p^2 + q^2 \neq 0$이면 $D$와 $D'$은 그 공간의 또 다른 기저(basis)를 이룬다. 알맞은 기저를 찾아 그것으로 전개한다는 같은 아이디어가 부분분수(partial fractions)와 미분방정식(differential equations)의 미정계수법(method of undetermined coefficients)의 바탕이 되며, 이는 대학 1학년 수리 방법론 과목에서 만나게 된다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 종류의 대칭 요령으로 풀리는 적분이 더 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.