풀이

STEP I 2002, 문제 6

순수수학 • 각뿔의 기하

STEP I 2002, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

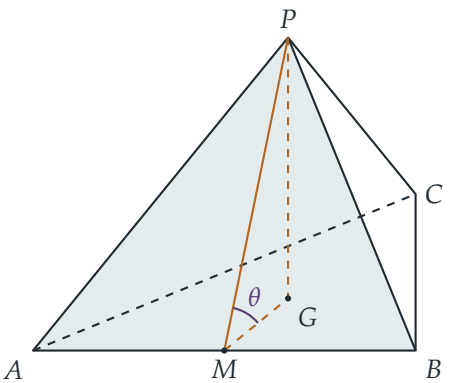
step.maths.org/questions/02-s1-q6

핵심 아이디어

대칭성(symmetry)에 의해 꼭대기 꼭짓점(apex)은 정삼각형 밑면의 중심 바로 위에 있으므로, 높이는 피타고라스 정리(Pythagorean theorem)를 한 번 적용하면 얻는다. 일단 부피를 알면 새 높이를 직접 구할 필요가 전혀 없다. 어느 면을 바닥에 놓든 부피는 같으므로 $V = \frac{1}{3} \times (\text{새 밑면의 넓이}) \times h$이기 때문이다. 마지막 부분의 각은 공통 모서리(edge)를 따라 만나는 두 면 사이의 각이며, 이를 가장 깔끔하게 보는 방법은 그 모서리에 수직이면서 꼭대기 꼭짓점을 지나는 단면(cross-section)을 생각하는 것이다.

풀이

밑면을 ABC라 하고 그 변의 길이를 a라 하자. 꼭대기 꼭짓점을 P라 하고 $PA = PB = PC = b$라 하자. ABC의 중심을 G, AB의 중점을 M이라 하자.



부피

밑면으로부터 P의 높이를 H라 하고, P에서 내린 수선의 발을 F라 하자. 직각삼각형 PFA, PFB, PFC는 변 $PF = H$를 공유하고 빗변의 길이가 b이므로

$$FA = FB = FC = \sqrt{b^2 - H^2}.$$

따라서 F는 세 꼭짓점에서 같은 거리에 있다. 즉 이 점은 ABC의 외심(circumcentre)이며, 정삼각형에서 외심은 중심 G와 같다. ABC의 중선(median)의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$이고, G는 꼭짓점에서부터 중선을 따라 3분의 2 되는 지점에 있으므로 $GA = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}$이다. 삼각형 PGA에서 피타고라스 정리에 의해

$$H^2 = b^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{3b^2 - a^2}{3}.$$

밑면의 넓이는 $\frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12}\, a^2 \left(3b^2 - a^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (이런 모양의 각뿔(pyramid)은 $3b^2 > a^2$일 때만 존재하며, 이는 정확히 이 값이 양의 실수가 되는 조건이다.)

새 높이

이제 면 PAB가 바닥에 놓여 있다. 이 면은 $PA = PB = b$이고 $AB = a$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로 PM은 AB에 수직이고, 삼각형 PMA에서 피타고라스 정리에 의해

$$PM^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4b^2 - a^2}{4}, \qquad \text{넓이} PAB = \frac{1}{2}\, a \cdot PM = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

생각해 보기 h를 구하려면 정말 새로운 꼭대기 꼭짓점의 위치를 찾아야 할까?

그렇지 않다. 입체는 변하지 않았으므로 부피는 여전히 V이고, 부피 공식은 어느 면을 밑면으로 잡아도 성립한다. 이때 높이는 그 면에 수직으로 잰다. 따라서

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2} \cdot h.$$

첫 번째 부분의 결과와 같다고 놓으면

$$\frac{a}{12}\sqrt{4b^2 - a^2}\, h = \frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2}},$$

이고, 양변을 제곱하면

$$h^2 = \frac{a^2(3b^2 - a^2)}{4b^2 - a^2},$$

을 얻는다. 이것이 구하려던 결과이다. 여기서 $4b^2 - a^2 > 0$인데, $4b^2 > 3b^2 > a^2$이기 때문이다.

정삼각형 면의 각

새 위치에서 바닥은 PAB의 평면이고, 정삼각형 면 ABC는 모서리 AB를 따라 바닥과 만난다. 두 평면 사이의 각은, 공통 모서리 위의 같은 점에서 그 모서리에 수직이 되도록 각 평면 안에 하나씩 그은 두 직선 사이의 각이다. M에서, 면 PAB 위의 직선 MP는 AB에 수직이고(PAB가 이등변삼각형이므로), 면 ABC 위의 직선 MC는 AB에 수직이며(ABC가 정삼각형이므로), G는 MC 위에 있다. 따라서 구하는 각은 $\theta = \angle PMC = \angle PMG$이다.

삼각형 PMG는 G에서 직각인데, PG가 밑면 전체에 수직이기 때문이다. 또한 GM은 중선의 3분의 1이므로 $GM = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{2\sqrt{3}}$이다. 그러므로

$$\tan\theta = \frac{PG}{GM} = \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{a} = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a},$$

이고, 따라서 정삼각형과 수평면 사이의 각은

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}\right).$$

G가 밑면 내부에 있으므로 이 각은 예각이고, 따라서 이 각은 그 보각(supplement)이 아니라 실제로 두 평면 사이의 각이다.

새 높이를 이용해도 같은 결과를 얻는다. 꼭짓점 C는 바닥으로부터 높이 h에 있고, 면을 따라 모서리 AB로부터 거리 $MC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$만큼 떨어져 있으므로 $\sin\theta = h \big/ \frac{\sqrt{3}}{2}a$이고, 따라서

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3(4b^2 - a^2)}}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{3(4b^2 - a^2)}},$$

이다. 이 값들은 위에서 구한 $\tan\theta$의 값과 일치한다.

검산

정사면체(regular tetrahedron)는 $a = b = 1$인 경우이다. 이때 공식에 의해 $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$, $h^2 = \frac{2}{3}$(대칭성에 의해 당연히 원래 높이와 같다)이고, $\cos\theta = \frac{1}{3}$이 되는데, 이는 잘 알려진 정사면체의 이면각(dihedral angle) $\theta \approx 70.53°$이다. $b \to a/\sqrt{3}$이면 각뿔이 납작해지고 $\theta \to 0$이며, $b \to \infty$이면 높고 뾰족한 모양이 되어 $\theta \to 90°$이다. 또한 무작위로 고른 20,000개의 쌍 (a, b)에 대해 좌표로 각뿔을 만들고, 삼중곱(triple product)으로 V를, C에서 평면 PAB까지의 거리로 h를, 법선(normal)으로부터 θ를 계산했다. 세 값 모두 약 10^{-13} 이내로 공식과 일치했다. 예를 들어 $a = 2, b = 3$이면 $h \approx 1.6956, \theta \approx 78.22°$이다.

흔한 실수

- GA를 중선의 절반으로 잡거나, 외접원의 반지름(circumradius) $\frac{a}{\sqrt{3}}$이 필요한 곳에 내접원의 반지름(inradius) $\frac{a}{2\sqrt{3}}$을 사용하는 것(마지막 부분에서는 그 반대).
- AC나 PC처럼 공통 모서리에 수직이 아닌 직선을 써서 면과 바닥 사이의 각을 재는 것.

STEP 너머

서로 다른 면을 밑면으로 삼아 같은 부피를 계산하는 것은, 부피가 입체를 어떻게 자르거나 어떤 방향으로 놓는지에 의존하지 않는다는 생각을 처음 엿보는 일이다. 대학 1학년 과정에서 사면체의 부피는 스칼라 삼중곱(scalar triple product)인 $\frac{1}{6}|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$(즉 3×3 행렬식(determinant))가 되고, 면 사이의 각은 법선벡터 사이의 각이 되는데, 우리의 수치 검산도 바로 이 방식으로 이루어졌다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*는 행렬식을 부피로서 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.