풀이

STEP I 2002, 문제 5

순수수학 • 다항식의 정수근

> **STEP I 2002, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q5

핵심 아이디어

일차인수(linear factor)의 곱으로 쓴 다항식(polynomial)은 특별한 점에서 값을 계산하기 쉽다. $x = 0$, $x = 1$ 또는 $x = -1$을 대입하면 인수분해(factorise)된 꼴은 각각 k_i, $k_i + 1$ 또는 $k_i - 1$의 곱이 되고, 전개된 꼴은 계수(coefficient)들의 합이 된다. 사차식(quartic)에서는 이 값들이 정해진 정수이고, 근(root)이 정수라는 것은 모든 $k_i \pm 1$이 알려진 수의 약수(divisor)여야 한다는 뜻이다. 그 수들을 소인수분해하면 가능성은 거의 남지 않는다.

풀이

세 항등식

$f(x)$의 두 표현은 같은 다항식이므로, 모든 x의 값에서 일치한다.

$x = 0$을 대입하자. 다른 모든 항은 x를 인수로 가지므로, 전개된 꼴에서는 $f(0) = a_n$이다. 인수분해된 꼴에서는 $f(0) = k_1 k_2 \cdots k_n$이다. 따라서

$$k_1 k_2 \cdots k_n = a_n.$$

$x = 1$을 대입하자. x의 모든 거듭제곱이 1이 되므로 전개된 꼴에서는 $f(1) = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$이고, 인수분해된 꼴에서는 $(1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n)$이다. 따라서

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_n + 1) = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

$x = -1$을 대입하자. 인수분해된 꼴에서는 $(k_1 - 1)(k_2 - 1) \cdots (k_n - 1)$이다. 전개된 꼴에

서 항 $a_j x^{n-j}$는 ($(-1)^{-j} = (-1)^j$를 이용하면) $(-1)^{n-j}a_j = (-1)^n(-1)^j a_j$가 되므로

$$(k_1 - 1)(k_2 - 1)\cdots(k_n - 1) = (-1)^n(1 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n).$$

n이 짝수이면 이는 단순히 $1 - a_1 + a_2 - \cdots + a_n$이고, n이 홀수이면 모든 부호가 반대가 된다.

사차식

사차식을 $f(x) = (x + k_1)(x + k_2)(x + k_3)(x + k_4)$로 쓰자. 그러면 근은 $-k_1, \ldots, -k_4$이고, 이들은 정수이다. $n = 4$일 때 항등식(identity)을 이용하면

$$k_1k_2k_3k_4 = 576 = 2^6 \cdot 3^2,$$
$$(k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1)(k_4 + 1) = 1 + 22 + 172 + 552 + 576 = 1323 = 3^3 \cdot 7^2,$$
$$(k_1 - 1)(k_2 - 1)(k_3 - 1)(k_4 - 1) = 1 - 22 + 172 - 552 + 576 = 175 = 5^2 \cdot 7.$$

모든 k_i는 2 이상이다. 모든 계수가 양수이므로 모든 $x \geq 0$에 대해 $f(x) > 0$이다. 따라서 모든 근은 음수이고, 모든 k_i는 양의 정수이다. 또한 어떤 k_i도 1이 아니다. 그렇지 않으면 세 번째 곱이 175가 아니라 0이 되기 때문이다. 따라서 각 i에 대해 $k_i \geq 2$이고, 수 $k_i - 1$과 $k_i + 1$은 모두 양의 정수이다.

생각해 보기 세 곱을 어떻게 가능한 k_i의 짧은 목록으로 바꿀 수 있을까?

각 $k_i - 1$은 175의 양의 약수이고, 각 $k_i + 1$은 1323의 양의 약수이다. 175의 약수는 $1, 5, 7, 25, 35, 175$이므로

$$k_i \in \{2, 6, 8, 26, 36, 176\}, \qquad k_i + 1 \in \{3, 7, 9, 27, 37, 177\}.$$

이 $k_i + 1$의 값들 가운데 $1323 = 3^3 \cdot 7^2$을 나누는 것은 $3, 7, 9, 27$뿐이다(37은 소수(prime)이고 $177 = 3 \cdot 59$이기 때문이다). 따라서 각 k_i는 $2, 6, 8, 26$ 중 하나이고, 각 $k_i + 1$은 $3, 7, 9, 27$ 중 하나이다.

이제 곱 $\prod(k_i + 1) = 3^3 \cdot 7^2$을 살펴보자.

- 인수 7^2은 7과 같은 인수에서만 나올 수 있으므로, $k_i + 1$ 중 정확히 두 개가 7이다. 즉 k_i 중 두 개가 6이다.
- 나머지 두 인수는 $\{3, 9, 27\}$에 속하는 3의 거듭제곱이고, 그 곱은 $3^3 = 27$이다. 각각은 3 이상이므로 27은 불가능하고(짝이 되는 인수가 1이 되어야 한다), 가능한 경우는 3×9뿐이다. 따라서 나머지 k_i는 2와 8이다.

그러므로 $\{k_1, k_2, k_3, k_4\} = \{2, 6, 6, 8\}$이다. 첫 번째 곱으로 확인해 보면 $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 = 576$이므로 요구된 대로이다. 전개해서도 확인할 수 있다.

$$(x + 2)(x + 8) = x^2 + 10x + 16, \qquad (x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36,$$

이고

$$(x^2+10x+16)(x^2+12x+36) = x^4+22x^3+172x^2+552x+576.$$

따라서 근은

$$x=-2, \quad x=-6 \text{ (중근)}, \quad x=-8.$$

검산

- k_i의 합은 $2+6+6+8=22$로, x^3의 계수와 일치한다.
- $f(-6) = 1296-4752+6192-3312+576 = 0$이고, $f'(x) = 4x^3+66x^2+344x+552$도 $x=-6$에서 0이 되므로 -6이 중근(repeated root)임이 확인된다.
- 항등식을 수치로 간단히 시험해 보자. $f(x) = (x+2)(x-3) = x^2-x-6$에 대해 $(2-1)(-3-1) = -4$이고 $1-(-1)+(-6) = -4$이다.

흔한 실수

- $x=-1$에 대한 결과에서 부호를 틀리는 것: n이 홀수일 때는 인수 $(-1)^n$이 중요하다.
- 중근이 허용된다는 것을 잊는 것: 1323에서 7^2을 보았다면 k_i 중 두 개는 같아야 한다.
- 모든 $k_i \geq 2$임을 먼저 보이지 않고 양의 약수만 나열하는 것: 바로 그 단계가 모든 $k_i \pm 1$을 양수로 만들어 준다.

STEP 너머

여기서 다룬 항등식은 비에트 공식(Vieta's formulae)의 특수한 경우이다. 비에트 공식은 다항식의 계수를 근의 기본대칭함수(elementary symmetric functions)로 나타낸다. 약수를 이용한 논증은 유리근 정리(rational root theorem)와, 정수 계수 다항식의 인수분해에 관한 가우스(Gauss)의 보조정리(Gauss's lemma)와 가까운 관계에 있으며, 이는 환(ring)에 관한 첫 강의에서 만나게 된다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.