풀이

STEP I 2002, 문제 4

순수수학 • 접선과 부등식

> **STEP I 2002, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q4

핵심 아이디어

$(0,1)$을 지나면서 더 나아간 곳에서 곡선에 접하는 직선은 그 두 점 사이에서 곡선보다 **아래**에 있어야 한다. 그 구간에서 곡선이 오목(concave)하다가 이후 완만해지기 때문이다. 직선 아래의 영역은 사다리꼴(trapezium)이고, 이를 y축을 중심으로 회전시키면 원기둥과 원뿔이 되므로 미적분 없이도 넓이와 부피를 쉽게 구할 수 있다. 이것들을 곡선 아래 영역의 정확한 넓이 및 부피와 비교하면 두 부등식을 얻는다.

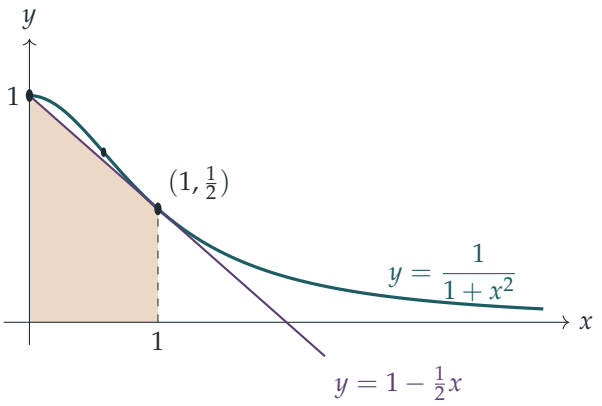
풀이

개형 그리기

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$이라 하자. 그러면 $f(0) = 1$, $f(x) > 0$이고, $x \to \infty$일 때 $f(x) \to 0$이므로 x축이 점근선(asymptote)이다. 미분하면

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \qquad f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

따라서 $f'(0) = 0$이고(곡선은 $(0,1)$에서 수평으로 출발한다) $x > 0$에서 $f'(x) < 0$이므로 곡선은 계속 감소한다. 또 $0 \le x < 1/\sqrt{3}$에서 $f''(x) < 0$이고 $x > 1/\sqrt{3}$에서 $f''(x) > 0$이므로 $(1/\sqrt{3}, \frac{3}{4})$에 변곡점(point of inflection)이 있다. 곡선은 y축 근처에서는 오목하고(아래로 휘어지고) 더 바깥쪽에서는 볼록(convex)하다.



색칠한 사다리꼴은 $0 \le x \le 1$에서 직선 아래의 영역이며, 곡선 아래의 영역 안에 놓인다.

직선 구하기

직선은 $(0, f(0)) = (0,1)$을 지나므로 어떤 기울기(gradient) m에 대하여 $y = 1 + mx$이다. 이 직선이 $x = a > 0$에서 접한다고(tangent) 하자. 그 점에서 두 조건이 성립해야 한다.

곡선과 만난다: $1 + ma = \dfrac{1}{1+a^2}$이므로 $ma = -\dfrac{a^2}{1+a^2}$이고, $a \neq 0$이므로

$$m = -\frac{a}{1+a^2}.$$

곡선과 기울기가 같다: $m = f'(a) = -\dfrac{2a}{(1+a^2)^2}$.

두 식을 같게 놓고 $-a/(1+a^2)$로 나누면($a > 0$이므로 가능하다) $1 = \dfrac{2}{1+a^2}$이므로 $a^2 = 1$이고, $a > 0$이므로 $a = 1$이다. 그러면 $m = -\frac{1}{2}$이고 직선은

$$y = 1 - \tfrac{1}{2}x,$$

이며, 곡선에 $(1, \frac{1}{2})$에서 접한다.

다른 교점이 없음

직선의 식에서 곡선의 식을 빼면

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(2-x)(1+x^2) - 2}{2(1+x^2)} = \frac{-x^3 + 2x^2 - x}{2(1+x^2)} = -\frac{x(x-1)^2}{2(1+x^2)}.$$

이 값은 $x = 0$ 또는 $x = 1$일 때만 0이 된다. 따라서 직선은 곡선과 $x = 0$에서, 그리고 접점 $x = 1$에서 만나며(중복 인수 $(x-1)^2$은 접한다는 사실의 대수적 표시이다), 그 밖에서는 만나지 않는다. $x \ge 0$에서뿐만 아니라 사실 음수 x에서도 만나지 않는다.

여기서 다음 단계에 필요한 사실도 읽어 낼 수 있다. $x > 0$이고 $x \neq 1$이면 이 식은 엄격히 음수이므로

$$0 < 1 - \tfrac{1}{2}x < \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{단, } 0 < x < 1. \tag{$*$}$$

(왼쪽 부등식은 $[0,1]$에서 $1 - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2}$이기 때문에 성립한다.) 따라서 $[0,1]$에서 직선은 양 끝점을 제외하면 그림에서처럼 곡선보다 엄격히 아래에 있다.

$\pi > 3$

$(*)$를 $[0,1]$에서 적분한다. 두 함수는 연속이고 열린구간에서 곡선이 직선보다 엄격히 위에 있으므로, 적분한 뒤에도 부등식은 엄격한 부등식으로 남는다.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

좌변은 $\frac{\pi}{4}$이다($[\arctan x]_0^1$이기 때문이다). 우변은 평행한 두 변의 길이가 1과 $\frac{1}{2}$이고 폭이 1인 색칠한 사다리꼴의 넓이이므로 $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$이다. 따라서 $\frac{\pi}{4} > \frac{3}{4}$, 즉

$$\pi > 3.$$

$\ln 2 > 2/3$

이제 같은 두 영역$(0 \leq x \leq 1)$을 y축을 중심으로 2π만큼 회전시킨다. $(*)$에 의해 사다리꼴은 곡선 아래 영역 안에 있으므로, 사다리꼴의 회전체(solid of revolution)는 다른 회전체 안에 있고 부피가 더 작다.

> **생각해 보기** 곡선이 x에 대한 y의 식으로 주어졌을 때, y축을 중심으로 한 회전체의 부피는 어떻게 구할까?

원통형 껍질(cylindrical shells)을 이용한다. x에서 폭이 δx이고 높이가 y인 얇은 띠는 부피가 약 $2\pi x\, y\, \delta x$인 껍질을 쓸고 지나가므로, 부피는 $\int_0^1 2\pi x\, y\, \mathrm{d}x$이다. (또는 수평으로 자를 수도 있다. 검산 참고.)

곡선의 경우

$$V_{\text{곡선}} = \int_0^1 \frac{2\pi x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi[\ln(1+x^2)]_0^1 = \pi \ln 2,$$

이다. 분자 $2x$가 분모의 도함수이기 때문이다.

직선의 경우 회전체는 반지름이 1이고 높이가 $\frac{1}{2}$인 원기둥(사다리꼴 중 $y = \frac{1}{2}$ 아래 부분에서 생긴다) 위에 반지름이 1이고 높이가 $\frac{1}{2}$인 원뿔(그 위의 삼각형에서 생긴다)을 얹은 것이다. 따라서

$$V_{\text{직선}} = \pi \cdot 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

껍질 방법으로 확인하면 $\int_0^1 2\pi x(1 - \frac{1}{2}x)\mathrm{d}x = 2\pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) = \frac{2\pi}{3}$이다.

피적분함수(integrand) $2\pi x(\frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x}{2})$는 연속이고, $(*)$에 의해 $[0,1]$에서 음이 아니며 $(0,1)$에서 엄격히 양수이므로 $V_{\text{curve}} > V_{\text{line}}$이다.

$$\pi \ln 2 > \frac{2\pi}{3} \quad \Longrightarrow \quad \ln 2 > \frac{2}{3},$$

이므로 증명이 끝난다.

검산

- 수치로 보면 $\pi/4 \approx 0.7854 > 0.75$이고 $\ln 2 \approx 0.6931 > 0.6667$이므로 두 부등식 모두 참이며, 어느 쪽도 여유가 그리 크지 않다.
- 대신 수평으로 자르면: $\frac{1}{2} \le y \le 1$에서 곡선은 $x^2 = \frac{1}{y} - 1$이므로, 부피는 원기둥 $\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2}$에 $\int_{1/2}^{1} \pi\left(\frac{1}{y} - 1\right)\mathrm{d}y = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$를 더한 것이고, 다시 $\pi \ln 2$를 얻는다.
- 인수분해(factorisation)의 간단한 확인: $x = 2$에서 직선의 값은 0, 곡선의 값은 $\frac{1}{5}$로 차이가 $-\frac{1}{5}$이다. 공식으로는 $-\frac{2\cdot 1}{2\cdot 5} = -\frac{1}{5}$이다.

흔한 실수

- 일반적인 점에서의 접선을 구하고 $(0,1)$을 지난다는 조건을 잊는 것(또는 그 반대). a를 결정하려면 두 조건이 모두 필요하다.
- "$\ge$"에서 멈추는 것. 엄격한 부등식을 얻으려면 어떤 구간에서 직선이 곡선보다 엄격히 아래에 있어야 하며, 바로 이것을 인수 $x(x-1)^2$이 보장해 준다.
- 실수로 x축을 중심으로 회전시키는 것. 그러면 $\int \pi y^2 \,\mathrm{d}x$가 되어 다른 값이 나온다.

STEP 너머

이 논증은 비교 원리(comparison principle)이다. 어떤 구간에서 두 함수 g, h가 모두 연속이고 $g \le h$이며 어딘가에서 엄격한 부등식이 성립하면 $\int g < \int h$이다. "어딘가에서 엄격히"를 엄밀하게 다루는 것은 적분을 상합과 하합(upper and lower sums)으로 정의하는 첫 해석학(analysis) 강의의 전형적인 연습 문제이다. 간단한 도형의 넓이로 π의 범위를 구하는 방법은 아르키메데스(Archimedes)까지 거슬러 올라가며, 이 문제를 훨씬 정밀하게 만든 형태(예를 들어 $\int_0^1 x^4(1-x)^4/(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi$)도 찾아볼 만하다. 해석학을 공부하려면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.