풀이

STEP I 2002, 문제 3

순수수학 • 미분을 이용한 부등식

> **STEP I 2002, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q3

핵심 아이디어

두 제곱근을 $\sqrt{P}$와 $\sqrt{Q}$라 하자. 근호 안의 두 양은 깔끔하게 연결되어 있다. $P+Q = a^2+b^2$는 상수이고, 두 양의 도함수(derivative)는 크기가 같고 부호가 반대이다. 그래서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$가 깔끔하게 인수분해되고, 그 부호는 삼각함수 인수 하나로 결정된다. y의 최댓값과 최솟값을 알고 나면 이중 부등식(double inequality)은 그저 "최솟값 $\le y \le$ 최댓값"일 뿐이며, 첫 번째 부분은 두 끝값의 대소가 올바르다는 것을 알려 준다.

풀이

첫 번째 부등식

전개하면

$$2a^2+2b^2-(a+b)^2 = a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \ge 0,$$

이므로 $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$이고, 등호는 정확히 $a=b$일 때 성립한다.

정류점

$c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$라 하고

$$P = a^2c^2+b^2s^2, \qquad Q = a^2s^2+b^2c^2, \qquad y = \sqrt{P}+\sqrt{Q}.$$

라 두자. 먼저 두 가지 특수한 경우를 보자. $a^2=b^2$이면 모든 θ에 대하여 $P=Q=a^2$이므로 $y=2|a|$는 상수이고 모든 점이 (자명하게) 정류점(stationary point)이다. 이 경우는 잠시 미루어 둔다. $a=0$ 또는 $b=0$이면(둘 다 0은 아닐 때) 어떤 θ에서 P나 Q가 0이 되고, 그 곳에서 y는 미분가능(differentiable)하지 않다. 이 경우는 마지막에 다룬다. 따라서 당분간

$ab \neq 0$이고 $a^2 \neq b^2$라고 가정한다. 그러면 $P \geq \min(a^2, b^2)(c^2 + s^2) > 0$이고, 마찬가지로 $Q > 0$이므로 y는 모든 곳에서 미분가능하다.

미분하면

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta} = -2a^2cs + 2b^2sc = (b^2 - a^2)\sin 2\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta} = (a^2 - b^2)\sin 2\theta.$$

이다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\theta}{2\sqrt{P}} - \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\theta}{2\sqrt{Q}} = \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\theta\,(\sqrt{Q} - \sqrt{P})}{2\sqrt{PQ}}.$$

이다. $\sqrt{Q} - \sqrt{P}$의 부호를 알아보기 위해 유리화(rationalise)하면

$$\sqrt{Q} - \sqrt{P} = \frac{Q - P}{\sqrt{Q} + \sqrt{P}}, \qquad Q - P = (a^2 - b^2)(s^2 - c^2) = (b^2 - a^2)\cos 2\theta.$$

이다. 이것을 대입하고 $2\sin 2\theta \cos 2\theta = \sin 4\theta$를 이용하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin 4\theta}{4\sqrt{PQ}\,(\sqrt{P} + \sqrt{Q})}.$$

를 얻는다.

생각해 보기 왜 굳이 $\sqrt{Q} - \sqrt{P}$를 유리화하는 수고를 들일 가치가 있을까?

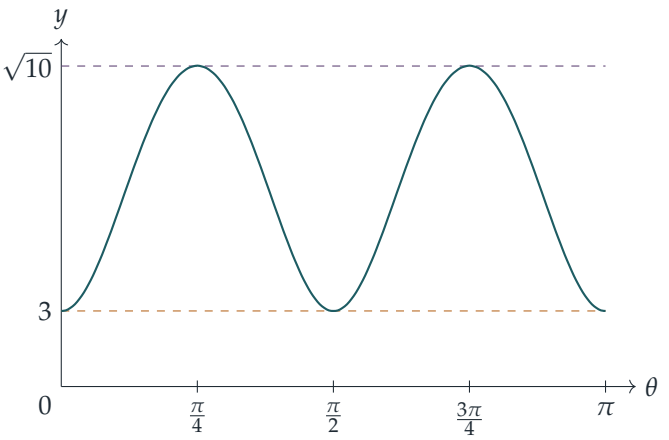
이제 $\sin 4\theta$를 제외한 모든 것이 양수임이 한눈에 보이기 때문이다. $(a^2 - b^2)^2 > 0$이고, P, Q는 양수이다. 따라서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$의 부호는 정확히 $\sin 4\theta$의 부호와 같고, 이것으로 정류점의 위치와 종류를 모두 알 수 있다.

정류점은 $\sin 4\theta = 0$인 곳, 즉 정수 n에 대하여 $\theta = \frac{1}{4}n\pi$인 곳이다.

- n이 짝수이면 $\theta = \frac{1}{2}k\pi$이므로 $\{c^2, s^2\} = \{1, 0\}$이고 $\{P, Q\} = \{a^2, b^2\}$이다. 이때 $y = |a| + |b|$이다($\sqrt{a^2} = |a|$임을 기억하자).
- n이 홀수이면 $\theta = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$이므로 $c^2 = s^2 = \frac{1}{2}$이고 $P = Q = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$이다. 이때 $y = 2\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$이다.

종류 판정. θ가 증가하면서 $\frac{1}{2}k\pi$를 지날 때 $\sin 4\theta$는 음수에서 양수로 바뀌므로 y는 감소에서 증가로 바뀐다. 따라서 이 점들은 **극소(minimum)**이다. θ가 증가하면서 $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$를 지날 때 $\sin 4\theta$는 양수에서 음수로 바뀌므로 이 점들은 **극대(maximum)**이다.

아래 그림은 세로 방향을 늘려서 $a = 2$, $b = 1$인 경우를 나타낸 것이다. y는 주기(period) $\frac{1}{2}\pi$로 3과 $\sqrt{10} \approx 3.162$ 사이를 진동한다.



마지막 부등식

θ를 $\theta + \frac{1}{2}\pi$로 바꾸면 c^2과 s^2이 서로 바뀌고, 따라서 P와 Q가 서로 바뀌므로 y의 주기는 $\frac{1}{2}\pi$이다. 한 주기 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 y는 $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 증가하고 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$에서 감소한다($\sin 4\theta$의 부호). 따라서 최솟값은 양 끝에서의 값 $|a| + |b|$이고, 최댓값은 $\frac{1}{4}\pi$에서의 값 $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$이다. 주기성에 의해 이 값들은 모든 θ에 대한 최솟값과 최댓값이므로

$$|a| + |b| \ \leq \ y \ \leq \ \sqrt{2a^2 + 2b^2}.$$

이다. 이 두 경계는 서로 모순이 없다. 첫 번째 부분을 $|a|$와 $|b|$에 적용하면 $(|a| + |b|)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$이므로, 하한은 실제로 상한을 넘지 않는다.

미루어 둔 경우. $a^2 = b^2$이면 $y = 2|a|$이고, $|a| + |b| = 2|a|$, $\sqrt{2a^2 + 2b^2} = \sqrt{4a^2} = 2|a|$이므로 부등식은 모두 등호로 성립한다. $b = 0$이면 $y = |a|(|\cos\theta| + |\sin\theta|)$이다. 이때 각 항이 1 이하이므로 $|\cos\theta| + |\sin\theta| \geq \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$이고, 첫 번째 부분에 의해 $(|\cos\theta| + |\sin\theta|)^2 \leq 2$이다. 따라서 $|a| \leq y \leq \sqrt{2}\,|a|$이며, 이것이 바로 구하는 부등식이다. $a = 0$인 경우는 a와 b를 바꾸면 똑같고, $a = b = 0$인 경우는 자명하다. 이로써 모든 a, b, θ에 대하여 결과가 증명된다. ■

검산

- $a = 2$, $b = 1$일 때 $y(0) = 2 + 1 = 3$이고 $y(\frac{1}{4}\pi) = 2\sqrt{5/2} = \sqrt{10} \approx 3.1623$이다. 많은 θ 값에 대해 y를 수치적으로 훑어보면 이 두 값 사이에 머문다.
- 무작위로 고른 a, b, θ에서 도함수 공식은 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$의 유한차분(finite difference) 추정값과 약 10^{-9} 이내로 일치한다.
- $a = b$이면 두 경계가 모두 $2|a|$로 같아지며, 이는 상수인 y와 일치한다.

흔한 실수

- $\sqrt{a^2} = a$라고 쓰는 것. 최솟값은 $|a| + |b|$이며, 답에 절댓값(modulus)이 나타나는 이유가 바로 이것이다.
- $\sin 2\theta = 0$에서 멈추어 $\sqrt{P} = \sqrt{Q}$가 되는 $\frac{1}{4}\pi$의 홀수 배에서의 정류점을 놓치는 것.
- 근거 없이 극대나 극소라고 부르는 것. $\sin 4\theta$의 부호를 보면 한 줄로 근거를 댈 수 있다.

STEP 너머

기하학적으로 보면, $\sqrt{P}$는 타원(ellipse) $x = a\cos\phi$, $y = b\sin\phi$의 중심에서 타원 위의 한 점까지의 거리이고, $\sqrt{Q}$는 매개변수로 4분의 1바퀴 더 돌아간 점까지의 거리이다. 따라서 이 문제는 이 두 "켤레" 반지름(conjugate radii)이 고정된 합 $a^2 + b^2$를 어떻게 나누어 갖는지에 관한 것이다. 두 경계는 또한 벡터(vector) (a, b)의 ℓ^1 노름(norm)과 (상수배한) ℓ^2 노름이기도 하며, 이처럼 노름을 비교하는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)과 선형대수학(linear algebra)에서 늘 쓰는 도구이다. 도함수를 이용해 부등식을 증명하는 방법에 대해 더 알고 싶다면 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.