풀이

STEP I 2002, 문제 2

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP I 2002, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q2

핵심 아이디어

다항식 $x^m(x-1)^n$은 $x=0$과 $x=1$에서 값이 0이 되므로, 그 사이 어딘가에서 그래프가 방향을 바꾸어야 한다. 곱의 미분법(product rule)으로 미분한 다음 **공통인수를 모두 묶어 낸다**. 그러면 도함수가 간단한 조각들로 나뉘고, 각 조각의 부호를 바로 읽어 낼 수 있다. 그래프의 개형 전체는 홀짝성(parity)이 결정한다. 거듭제곱의 지수가 짝수인지 홀수인지에 따라 곡선이 축에 접하는지 축을 가로지르는지, 그리고 축의 어느 쪽에 있는지가 정해진다.

풀이

정류점

곱의 미분법에 의해

$$\begin{aligned} \mathrm{f}'(x) &= mx^{m-1}(x-1)^n + nx^m(x-1)^{n-1} \\ &= x^{m-1}(x-1)^{n-1}[m(x-1)+nx] \\ &= x^{m-1}(x-1)^{n-1}[(m+n)x-m]. \end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{f}'(x)=0$이 되는 것은 정확히 다음 경우이다: $x=0$, $x=1$ 또는

$$x = x_0 = \frac{m}{m+n}.$$

$m, n > 0$이므로 $0 < m < m+n$이고, 따라서 $0 < x_0 < 1$이다. 이것이 구하려던 정류점(stationary point)이다. ($m, n \geq 2$이므로 지수 $m-1$과 $n-1$은 적어도 1이고, 따라서 $x=0$과 $x=1$도 정류점이다. 그래프를 그릴 때 이 점들이 필요하다.)

정류점의 종류

$g(x) = x^{m-1}(x-1)^{n-1}$, $h(x) = (m+n)x - m$이라 하고 $\mathrm{f}'(x) = g(x)\,h(x)$로 쓰자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\mathrm{f}''(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = g'(x)h(x) + (m+n)g(x).$$

? **생각해 보기** g를 정말로 끝까지 미분해야 할까?

그럴 필요 없다. x_0에서는 $h(x_0) = 0$이므로, g'이 무엇이든 첫째 항은 사라진다.

$$\mathrm{f}''(x_0) = (m+n)\,x_0^{m-1}\,(x_0-1)^{n-1}.$$

여기서 $m+n > 0$이고 $x_0^{m-1} > 0$이지만 $x_0 - 1 < 0$이다. 따라서 $\mathrm{f}''(x_0)$는 0이 아니고, 그 부호는 $(-1)^{n-1}$의 부호와 같다.

- n이 짝수이면 $n-1$은 홀수이고, $\mathrm{f}''(x_0) < 0$이므로 x_0은 **극대**(maximum)이다.
- n이 홀수이면 $n-1$은 짝수이고, $\mathrm{f}''(x_0) > 0$이므로 x_0은 **극소**(minimum)이다.

$\mathrm{f}''(x_0) \neq 0$이므로 이계도함수 판정법(second-derivative test)으로 결론을 내릴 수 있다. 이것이 보여야 할 내용이었다.

그래프의 개형

네 가지 경우는 m과 n의 홀짝성으로 나뉜다. 각 경우의 그래프를 그리기 위해 다음 사실들을 모은다.

f의 부호. $x > 1$이면 두 인수가 모두 양수이므로 $\mathrm{f} > 0$이다. $0 < x < 1$이면 $x^m > 0$이고 $(x-1)^n$의 부호는 $(-1)^n$의 부호와 같다. $x < 0$이면 부호는 $(-1)^m(-1)^n = (-1)^{m+n}$이다.

근 근처에서의 모양. $x = 0$ 근처에서 $\mathrm{f}(x) \approx (-1)^n x^m$이다. m이 짝수이면 f는 0의 양쪽에서 같은 부호를 유지하므로, 곡선은 그 점에서 축에 접한다(극점(turning point)). m이 홀수이면 f의 부호가 바뀌고, $\mathrm{f}'(0) = 0$이므로 곡선은 수평으로 축을 가로지른다(정류 변곡점(stationary point of inflection)). $x = 1$에서도 n에 대해 같은 논리가 적용된다.

양 끝. $|x|$가 클 때 $\mathrm{f}(x)$는 x^{m+n}처럼 행동하므로, $x \to +\infty$일 때 $\mathrm{f} \to +\infty$이다. $x \to -\infty$일 때는 $m+n$이 짝수이면 $\mathrm{f} \to +\infty$이고, $m+n$이 홀수이면 $\mathrm{f} \to -\infty$이다.

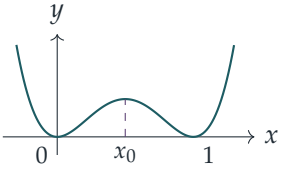
다른 정류점은 없다. 정류점은 $x = 0, x_0, x = 1$뿐이다.

이를 종합하면 다음과 같다.

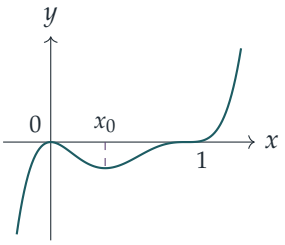
- **m 짝수, n 짝수:** 모든 곳에서 $\mathrm{f} \geq 0$이다. 0과 1에서 축 위의 극소를 갖고 x_0에서 극대를 갖는다. W자 모양이다.

- m **짝수,** n **홀수:** 곡선은 $-\infty$에서 올라와 0에서 아래쪽으로부터 축에 접하고(극대), x_0의 극소까지 내려간 다음, 1에서 정류 변곡점을 지나 $+\infty$로 올라간다.
- m **홀수,** n **짝수:** 곡선은 $-\infty$에서 올라와 0에서 정류 변곡점을 지나 x_0의 극대에 이르고, 내려가서 1에서 축에 접한 다음(극소), $+\infty$로 올라간다.
- m **홀수,** n **홀수:** 곡선은 $+\infty$에서 내려와 0에서 정류 변곡점을 지나 x_0의 극소에 이르고, 다시 올라가 1에서 정류 변곡점을 지나 $+\infty$로 간다.

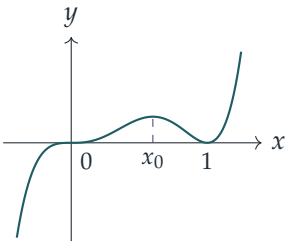
아래 그래프는 가장 작은 경우인 $(m,n) = (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)$을 그린 것이며, 각각 세로 축척이 다르다. x_0에서의 값은 작아서 각각 $\frac{1}{16}$, $-\frac{108}{3125}$, $\frac{108}{3125}$, $-\frac{1}{64}$이다.



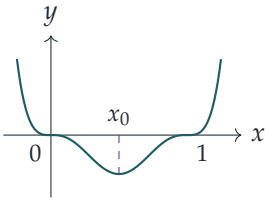
m 짝수, n 짝수



m 짝수, n 홀수



m 홀수, n 짝수



m 홀수, n 홀수

검산

- $m = n = 2$로 두자. $f(x) = \big(x(x-1)\big)^2$은 $x = \frac{1}{2}$에 대하여 대칭이고, $x_0 = \frac{1}{2}$은 실제로 극대이며 그 값은 $\frac{1}{16}$이다.
- 치환 $x \mapsto 1-x$는 $x^m(x-1)^n$을 $(-1)^{m+n}x^n(x-1)^m$으로 바꾼다. 따라서 m과 n을 맞바꾸면 그래프가 $x = \frac{1}{2}$에 대하여 대칭이동된다($m+n$이 홀수이면 x축에 대해서도 대칭이동된다). 그래서 홀짝성이 섞인 두 그래프가 서로 거울상이 된다.
- $2 \le m, n \le 8$인 모든 경우에 대하여 f'을 수치 미분과 비교하고, $f''(x_0)$의 부호를 유한 차분과 비교하여 확인하였다. 예를 들어 $(m,n) = (2,3)$일 때 $f''(\frac{2}{5}) = 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{25} = 0.72 > 0$이므로, 예측대로 극소이다.

흔한 실수

- $f''(x)$를 끝까지 전개하는 것. x_0에서는 인수 $(m+n)x-m$이 0이므로 한 항만 남는다.
- $x=0$과 $x=1$도 정류점이라는 사실($m,n\geq 2$이기 때문)을 잊고, 그 점들에서 곡선이 비스듬히 축을 가로지르도록 그리는 것.
- $x<0$에서의 부호를 잘못 구하는 것. 부호는 m만이 아니라 $m+n$에 따라 정해진다.

STEP 너머

중복도(multiplicity)가 k인 근 근처에서 다항식의 국소적인 모양은 $c(x-a)^k$와 같고, k의 홀짝성이 접하는지 가로지르는지를 결정한다. 이것은 테일러(Taylor) 정리와 정류점에 대한 고계도함수 판정법(higher-derivative test)으로 나아가는 첫걸음이다. 정류점에서 0이 아닌 첫 번째 도함수의 계수가 k일 때, k가 짝수이면 그 점은 극점이고 k가 홀수이면 변곡점이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 이러한 아이디어를 엄밀한 토대 위에 세운다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.