풀이

STEP I 2002, 문제 13

확률과 통계 • 조건부 기댓값

> **STEP I 2002, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q13

핵심 아이디어

가능한 순서쌍 (U, V)는 여섯 개뿐이므로, 모든 것은 결합 확률(joint probability)을 담은 작은 표 하나와 각 경우에 대한 약간의 계산으로 귀결된다. 이차방정식에서는 U^2이 많아야 1이므로 V의 부호가 모든 것을 결정한다. 삼차방정식에서는 계수들이 U, V와 수상할 정도로 얽혀 있다. 이는 인수분해(factorise)가 된다는 강력한 힌트이며, 일단 인수분해하면 근을 바로 읽어 낼 수 있다.

풀이

먼저 결합 분포(joint distribution)를 구한다. $\mathrm{P}(U = u, V = v) = \mathrm{P}(U = u)\,\mathrm{P}(V = v \mid U = u)$이고 각 u에 대하여 $\mathrm{P}(U = u) = \frac{1}{3}$이므로

	$U = 1$	$U = 0$	$U = -1$
$V = 1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$
$V = -1$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$

여섯 개의 값을 더하면 마땅히 그래야 하듯 1이 된다.

소문항 (i)

$x^2 + Ux + V = 0$의 두 근이 모두 실수일 필요충분조건은 판별식(discriminant)이 음이 아닌 것, 즉 $U^2 - 4V \geq 0$이다.

- $V = -1$이면 판별식은 $U^2 + 4 > 0$이므로, U의 값에 관계없이 근은 실수이다(그리고 서로 다르다).

- $V = 1$이면 $U^2 \le 1$이므로 판별식은 $U^2 - 4 \le 1 - 4 < 0$이다. 따라서 근은 결코 실수가 아니다.

그러므로 두 근이 모두 실수일 필요충분조건은 $V = -1$이고,

$$\mathrm{P}(\text{두 근이 모두 실수}) = \mathrm{P}(V = -1) = \tfrac{2}{9} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{4+3+2}{18} = \tfrac{1}{2},$$

이므로 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

소문항 (i)에 의해 "두 근이 모두 실수"라는 조건을 거는 것은 $V = -1$이라는 조건을 거는 것과 같다. 표의 아랫줄을 $\mathrm{P}(V = -1) = \frac{1}{2}$로 나누면 다음을 얻는다.

$$\mathrm{P}(U = 1 \mid V = -1) = \tfrac{4}{9}, \qquad \mathrm{P}(U = 0 \mid V = -1) = \tfrac{1}{3}, \qquad \mathrm{P}(U = -1 \mid V = -1) = \tfrac{2}{9}.$$

? **생각해 보기** 여기서 왜 그냥 $\mathrm{P}(U = u) = \frac{1}{3}$을 쓸 수 없을까?

U와 V가 독립(independent)이 아니기 때문이다. $V = -1$임을 알면 $U = 1$일 가능성이 더 커진다($U = 1$일 때 $V = -1$일 확률이 $\frac{2}{3}$이므로). 우리가 구하려는 기댓값(expectation)은 조건부이므로, 가중치도 조건부 확률(conditional probability)이어야 한다.

$V = -1$일 때 방정식은 $x^2 + Ux - 1 = 0$이고, 그 큰 근은

$$R = \frac{-U + \sqrt{U^2 + 4}}{2}.$$

이다. 따라서 $U = 1$이면 $R = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, $U = 0$이면 $R = 1$, $U = -1$이면 $R = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R \mid \text{근이 실수}) &= \tfrac{4}{9} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \tfrac{1}{3} \cdot 1 + \tfrac{2}{9} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \\ &= \frac{4\sqrt{5} - 4 + 6 + 2\sqrt{5} + 2}{18} \\ &= \frac{6\sqrt{5} + 4}{18} = \frac{3\sqrt{5} + 2}{9}.\end{aligned}$$

소문항 (iii)

상수항이 U이므로 $(x + U)$라는 인수를 짐작할 수 있다. 실제로

$$\begin{aligned}(x + U)(x^2 - 2Vx + 1) &= x^3 - 2Vx^2 + x + Ux^2 - 2UVx + U \\ &= x^3 + (U - 2V)x^2 + (1 - 2UV)x + U,\end{aligned}$$

이고, 이는 주어진 삼차식과 정확히 같다. 따라서 근은 $x = -U$와 $x^2 - 2Vx + 1 = 0$의 근들이다. $V = \pm 1$이면 $V^2 = 1$이므로 이 이차방정식의 판별식은 $4V^2 - 4 = 0$이다. 따라서 이 이차방정식은 중근(repeated root) $x = V$를 가지고, 삼차방정식은

$$(x + U)(x - V)^2 = 0,$$

이 되어 근은 $-U, V, V$이다.

세 근이 모두 양수일 필요충분조건은 $-U > 0$이고 $V > 0$, 즉 $U = -1$이고 $V = 1$인 것이다. ($U = 0$이면 한 근이 0이 되는데, 이는 양수가 아니다.) 표로부터

$$\mathrm{P}(\text{모든 근이 양수}) = \mathrm{P}(U = -1,\, V = 1) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{9}.$$

검산

- 조건부 확률 $\frac{4}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$를 더하면 1이다.
- (ii)의 답은 약 0.967이다. 이 값은 큰 근이 가질 수 있는 가장 작은 값 $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0.618$과 가장 큰 값 $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \approx 1.618$ 사이에 있어야 하고, 가장 작은 근에 가장 큰 가중치가 걸리므로 가운데 값 1보다 작아야 한다. 실제로 그렇다.
- (iii)에서 $U = -1$, $V = 1$을 대입해 보면 삼차식은 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$이 되어 근은 $1, 1, 1$로 모두 양수이다. $U = 1$, $V = 1$을 대입해 보면 $x^3 - x^2 - x + 1 = (x + 1)(x - 1)^2$이 되어 음수인 근 -1을 가진다.
- 세 답 모두 여섯 가지 경우를 분수로 정확히 나열하여 확인하였고, 각 경우에 삼차방정식의 근을 수치적으로 구하여서도 확인하였다.

흔한 실수

- (ii)에서 조건 없는 가중치 $\frac{1}{3}$을 사용하면, 그 대신 $\frac{1}{3}(\sqrt{5} + 1) \approx 1.079$를 얻게 된다.
- (iii)에서 $U = 0$인 경우를 포함하는 것: 근 0은 양수가 아니다.
- 인수분해를 찾지 않고 판별식이나 부호 변화로 삼차방정식을 분석하려는 것.

STEP 너머

이 문제의 핵심은 조건부 확률로 가중치를 다시 매겨 계산하는 조건부 기댓값(conditional expectation) $\mathrm{E}(X \mid A)$이다. 대학에서는 이 개념이 그 자체로 하나의 확률변수(random variable)인 조건부 기댓값 $\mathrm{E}(X \mid Y)$와, 어려운 기댓값을 쉽게 구하게 해 주는 탑 법

칙(tower law) $\mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X \mid Y)\big) = \mathrm{E}(X)$로 발전한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 이를 명료하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.