풀이

STEP I 2002, 문제 12

확률과 통계 • 기하학적 확률

> **STEP I 2002, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q12

핵심 아이디어

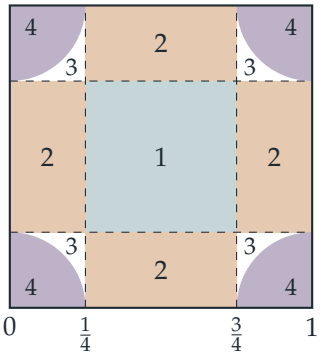
격자는 같은 모양이 반복되므로, "발굽을 무작위로 놓는다"는 것은 곧 발굽의 중심이 한 단위 정사각형 위에 균등하게 분포(uniformly distributed)한다는 뜻이다. 발굽이 몇 개의 칸에 닿는지는 중심이 그 정사각형의 변과 꼭짓점에 얼마나 가까운지에만 달려 있으므로, 각 답은 정사각형 안의 한 영역에 대응하고 그 확률(probability)은 그 영역의 넓이이다. 네 확률을 구하고 나면, 나머지는 그 확률들과 평균을 Harry가 실제로 한 결과와 비교하는 일이다.

풀이

Harry의 답의 분포

발굽의 중심 C가 단위 정사각형 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 안에 있다고 하자. Harry가 발굽을 무작위로 놓는다면, 격자의 주기성(periodicity)에 의해 C는 이 정사각형 위에 균등하게 분포하므로, C가 어떤 영역에 있을 확률은 그 영역의 넓이이다. 일부라도 덮인 칸의 개수를 N이라 하자.

발굽의 반지름은 $\frac{1}{4}$이고 이는 $\frac{1}{2}$보다 작으므로, 발굽은 세로 격자선을 많아야 하나, 가로 격자선을 많아야 하나 가로지를 수 있다. 발굽이 세로선을 가로지르는 것은 정확히 $x < \frac{1}{4}$ 또는 $x > \frac{3}{4}$일 때이고, 가로선을 가로지르는 것은 정확히 $y < \frac{1}{4}$ 또는 $y > \frac{3}{4}$일 때이다. (선으로부터 거리가 정확히 $\frac{1}{4}$인 위치들은 넓이가 0이므로 무시한다.)



사건 "세로선을 가로지른다"와 "가로선을 가로지른다"의 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이고, x와 y가 서로 독립인 균등분포 좌표이므로 두 사건은 독립(independent)이다. 따라서 다음이 성립한다.

- 발굽이 어떤 선도 가로지르지 않으면 $N = 1$이다. 이때 C는 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 가운데 정사각형 안에 있으므로 $\mathrm{P}(N = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$이다.
- 정확히 한 선을 가로지르면 $N = 2$이다. $\mathrm{P}(N = 2) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$이다.
- 두 종류의 선을 하나씩 가로지르면, C는 한 변의 길이가 $\frac{1}{4}$인 네 귀퉁이 정사각형 중 하나에 있고, 그 확률은 모두 합해 $\frac{1}{4}$이다. 두 선은 격자의 한 꼭짓점에서 만나며, 발굽이 그 꼭짓점 둘레의 네 칸 모두를 일부라도 덮을 필요충분조건은 발굽이 그 꼭짓점 자체를 덮는 것이다.

생각해 보기 귀퉁이 정사각형 안에서는 왜 답이 격자 꼭짓점까지의 거리에 따라 달라질까?

원점에 가장 가까운 귀퉁이 정사각형, 즉 $0 < x < \frac{1}{4}, 0 < y < \frac{1}{4}$인 부분을 생각하자. 발굽은 C를 포함하는 칸, 그 왼쪽 칸, 그 아래쪽 칸에는 분명히 닿는다. 대각선 방향의 칸 $x < 0$, $y < 0$에서 C에 가장 가까운 점은 원점이고, 그 거리는 $\sqrt{x^2 + y^2}$이므로, 발굽이 이 칸에 들어가는 것은 정확히 $\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{4}$일 때이다. 따라서 C가 격자 꼭짓점으로부터 $\frac{1}{4}$ 이내에 있으면 $N = 4$이고, 그렇지 않으면 $N = 3$이다.

단위 정사각형에서 네 꼭짓점 중 하나로부터 $\frac{1}{4}$ 이내에 있는 점들은 반지름 $\frac{1}{4}$인 사분원 네 개를 이루고, 그 넓이의 합은 $\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{16}$이다. 그러므로

$$\mathrm{P}(N = 1) = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(N = 2) = \tfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(N = 3) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{\pi}{16}, \qquad \mathrm{P}(N = 4) = \tfrac{\pi}{16}.$$

지금까지의 증거는 무작위로 답하는 말과 들어맞는가?

정답이 $4 \div 4 = 1$일 때, 무작위로 답하는 말이 맞힐 확률은 $\mathrm{P}(N = 1) = \frac{1}{4}$이다. 정답이 $2 + 2 = 4$일 때 맞힐 확률은 $\mathrm{P}(N = 4) = \frac{\pi}{16} \approx 0.196$이다. 이는 관찰된 성공률과 정확히 같

으므로, 그렇다. 증거는 Harry가 그저 발굽을 무작위로 놓고 있을 뿐이라는 내 의심과 완전히 들어맞는다.

답의 기댓값, 그리고 새 말

Harry가 발굽을 무작위로 놓는다면 그의 답은 문제와 무관하므로, 그의 답의 기댓값(expected value)은 그냥 $\mathrm{E}(N)$이다(정답들이 같은 빈도로 나온다는 사실은 아무 역할도 하지 않는다).

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= 1\cdot\tfrac{1}{4} + 2\cdot\tfrac{1}{2} + 3\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{\pi}{16}\right) + 4\cdot\tfrac{\pi}{16}\\ &= \tfrac{1}{4} + 1 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{\pi}{16}\\ &= 2 + \tfrac{\pi}{16} \approx 2.20.\end{aligned}$$

관찰된 평균 2를 두 가설과 비교해 보자.

- *Harry*가 **올바르게 계산한다**. 정답 $1, 2, 3, 4$가 같은 빈도로 나오므로 평균은 $\frac{5}{2}$여야 한다. 평균 2는 이보다 한참 낮으므로, Harry는 분명히 많은 답을 틀리고 있다. 실제로 틀린 답 하나는 정답보다 많아야 3만큼 작고 평균 부족분이 $\frac{1}{2}$이므로, 그의 답 가운데 적어도 $\frac{1}{6}$은 틀려야 한다.
- *Harry*가 **무작위로 답한다**. 평균은 $2 + \frac{\pi}{16} \approx 2.20$에 가까워야 한다. 답 하나의 분산(variance)은 $\mathrm{E}(N^2) - \mathrm{E}(N)^2 = \frac{9}{2} + \frac{7\pi}{16} - \left(2 + \frac{\pi}{16}\right)^2 \approx 1.05$이므로, 문제 n개에 대한 평균의 표준편차(standard deviation)는 약 $1.02/\sqrt{n}$이다. "많은" 문제(예를 들어 $n = 400$이면 표준편차는 약 0.05)에서 평균 2는 표준편차의 약 네 배만큼 너무 낮으며, 이는 우연히 일어나기 매우 어렵다.

따라서 문제가 많을 때 평균 2는 발굽을 무작위로 놓는 말에게조차 너무 낮다. Harry는 마치 발굽을 살짝 누르거나 칸의 한가운데를 노리는 것처럼 작은 답을 선호하는 듯하다. 어느 쪽이든 Harry는 계산을 하고 있지 않으며, 무작위로 답하는 말보다도 못하다. 그렇다. 새 말을 들일 때가 되었다(이왕이면 산수를 할 줄 아는 말로).

검산

- 네 확률의 합이 맞는다. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} = 1$이고, $\mathrm{P}(N = 3) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16} \approx 0.054$는 마땅히 그래야 하듯 양수이다.
- 발굽을 무작위로 400 000번 놓고 중심으로부터 거리 $\frac{1}{4}$ 이내에 있는 칸을 세는 시뮬레이션을 했더니, 상대도수는 0.2495, 0.4990, 0.0547, 0.1968이고 평균은 2.199로, $2 + \frac{\pi}{16} \approx 2.196$과 비교된다.
- 타당성 점검: 발굽이 아주 작다면 답은 거의 언제나 1이고 평균은 1에 가까워질 것이다.

발굽이 더 크면 답이 더 커지며, 우리의 경우는 그 중간에 놓인다.

흔한 실수

- 발굽이 격자선 두 개를 가로지르면 언제나 네 칸을 덮는다고 가정하는 것. 발굽은 두 선이 만나는 꼭짓점에도 닿아야 하며, 바로 이 때문에 π가 나타난다.
- 평균 2가 "2.5보다 낮다"는 이유로 무작위성의 증거로 여기는 것. 무작위성이 예측하는 값은 약 2.2이므로, 평균의 퍼짐을 고려하여 그 값과 비교해야 한다.

STEP 너머

이것은 **기하학적 확률**(*geometric probability*)이다. 한 점이 어떤 영역 위에 균등하게 분포하면 확률은 넓이가 되며, 같은 아이디어로 뷔퐁의 바늘(Buffon's needle) 문제를 풀 수 있는데, 그 답에도 π가 들어 있는 것으로 유명하다. 마지막 부분은 가설검정(hypothesis testing)의 첫 맛보기로, 중심극한정리(central limit theorem)를 이용해 관찰된 평균이 어떤 모형 아래에서 그럴듯한지 판단한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)은 연속 균등분포와, 이런 종류의 논증 뒤에 있는 극한 정리들을 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.