풀이

STEP I 2002, 문제 11

역학 • 비스듬한 탄성 충돌

STEP I 2002, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

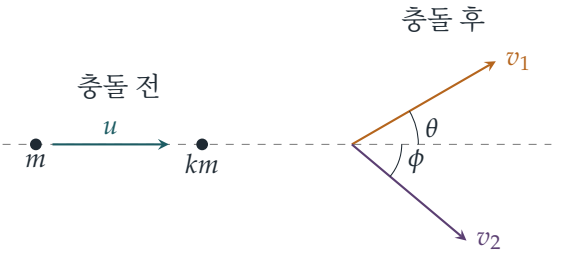
step.maths.org/questions/02-s1-q11

핵심 아이디어

충돌(collision)에서는 두 가지 보존 법칙(conservation law)을 쓸 수 있다. 하나는 운동량(momentum)으로, 벡터(vector)이므로 성분별로 두 개의 방정식을 준다. 다른 하나는 에너지 손실이 없으므로 성립하는 운동 에너지(kinetic energy) 보존이다. 두 운동량 방정식은 충돌 후의 미지의 속력에 대해 일차이므로, 이 속력들을 각으로 나타낼 수 있다. 이것을 에너지 방정식에 대입하면 모든 속력이 사라지고, 각과 k만의 관계식이 남는다.

풀이

P_1과 P_2를 평면 위에서 움직이는 입자로 모형화하고, 충돌하는 동안 외력은 작용하지 않는다고 하자. P_1이 x축을 따라 속력 $u > 0$으로 다가오고, 충돌 후의 속력을 v_1(P_1, 축 위쪽으로 각 θ)과 v_2(P_2, 축 아래쪽으로 각 ϕ)라 하자. 여기서 $0 < \theta < \pi, 0 < \phi < \pi$이다.



항등식

처음 운동 방향과 그에 수직인 방향으로 운동량 보존을 적용하면 (m을 약분한 뒤)

$$v_1 \cos\theta + kv_2 \cos\phi = u,$$
$$v_1 \sin\theta - kv_2 \sin\phi = 0,$$

을 얻는다. 여기서 음의 부호는 P_2가 축의 반대편으로 움직이기 때문이다. 운동 에너지 보존에서 $\frac{1}{2}m$을 약분하면

$$v_1^2 + kv_2^2 = u^2. \qquad (*)$$

운동량 방정식은 두 미지수 v_1과 kv_2에 대한 두 개의 일차방정식이다. 첫째 식에 $\sin\phi$를, 둘째 식에 $\cos\phi$를 곱하여 더하면 kv_2 항이 소거되어

$$v_1(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) = u\sin\phi, \qquad \text{따라서} \qquad v_1 = \frac{u\sin\phi}{\sin(\theta+\phi)}.$$

마찬가지로 첫째 식에 $\sin\theta$를, 둘째 식에 $\cos\theta$를 곱하여 빼면

$$kv_2 = \frac{u\sin\theta}{\sin(\theta+\phi)}.$$

생각해 보기 $\sin(\theta+\phi)$로 나누어도 될까?

$\theta+\phi \neq \pi$이어야 한다(이 값은 0과 2π 사이에 엄격히 놓인다). 만약 $\theta+\phi = \pi$이면 $\sin\phi = \sin\theta$이고 $\cos\phi = -\cos\theta$이다. 그러면 둘째 운동량 방정식은 $(v_1 - kv_2)\sin\theta = 0$이 되고, $\sin\theta \neq 0$이므로 $v_1 = kv_2$이다. 이때 첫째 식은 $(v_1 - kv_2)\cos\theta = u$가 되어 $0 = u$를 얻는데, 이는 불가능하다. 따라서 $\sin(\theta+\phi) \neq 0$이고 나눗셈에는 문제가 없다.

이제 kv_2^2를 $(kv_2)^2/k$로 쓰고 $(*)$에 대입하면

$$\frac{u^2\sin^2\phi}{\sin^2(\theta+\phi)} + \frac{u^2\sin^2\theta}{k\sin^2(\theta+\phi)} = u^2.$$

양변에 $k\sin^2(\theta+\phi)/u^2$(0이 아니다)를 곱하면

$$\sin^2\theta + k\sin^2\phi = k\sin^2(\theta+\phi),$$

이므로 증명이 끝난다.

(기하학적으로 보면, 운동량 방정식은 운동량 mv_1, kmv_2, mu가 세 각이 ϕ, θ, $\pi-(\theta+\phi)$인 삼각형을 이룬다는 뜻이고, 위의 두 식은 바로 그 삼각형에서의 사인 법칙(sine rule)이다.)

두 경로가 직각을 이룰 때

두 경로가 직각을 이루면 $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$이므로 $\sin^2(\theta + \phi) = 1$이고 $\sin\theta = \cos\phi$이다. 그러면 항등식은

$$\cos^2\phi + k\sin^2\phi = k, \qquad \text{즉,} \qquad \cos^2\phi = k(1 - \sin^2\phi) = k\cos^2\phi.$$

이 된다. 여기서 $\cos\phi \neq 0$이다. 그렇지 않으면 $\phi = \frac{\pi}{2}$이고 따라서 $\theta = 0$인데, 문제에서 θ는 0이 아니라고 했기 때문이다. $\cos^2\phi$로 나누면 $k = 1$을 얻으므로 증명이 끝난다.

검산

- 당구에서 익숙한 사실이 있다. 질량이 같은 두 공 가운데 하나가 정지해 있을 때 탄성 충돌(elastic collision)이 일어나면, 두 공은 직각으로 갈라져 움직인다. 우리의 결과는 그 역(converse)이다.
- 수치 예: $k = 2, \phi = 30°$로 잡자. 그 방향을 따라 매끄러운 탄성 충돌이 일어나면 P_2는 속력 $\frac{2}{3}u\cos 30°$로 튕겨 나가고, P_1은 $\theta = 90°$로 움직인다. 항등식의 양변은 모두 $\frac{3}{2}$이다.
- 또한 무작위 탄성 충돌 2×10^5회(무작위 k, u, 충돌 방향)를 시뮬레이션하였다. 항등식과 v_1, kv_2에 대한 두 공식이 모두 10^{-12} 이내의 오차로 성립하였다.

흔한 실수

- 수직 방향 운동량 방정식을 $v_1\sin\theta + kv_2\sin\phi = 0$으로 쓰는 것: 두 입자는 서로 반대편으로 움직이므로 성분의 부호가 반대이다.
- 에너지 방정식에서 k를 빠뜨리거나, 마지막 단계에서 왜 $\cos\phi \neq 0$인지 밝히지 않는 것.

STEP 너머

질량중심(centre of mass)과 함께 움직이는 좌표계에서 보면, 탄성 충돌은 두 속도의 크기는 그대로 둔 채 방향만 회전시킨다. 이러한 각 관계식들은 모두 가능한 결과들이 이루는 그 원을 실험실 좌표계(laboratory frame)로 되돌려 옮긴 데서 나온다. 이 관점은 당구공에서 입자물리학에 이르기까지 산란(scattering)을 다루는 표준적인 방법이다. 입자물리학에서는 측정한 산란각을 이용해 충돌하는 입자들의 질량비를 알아낸다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌을 질량중심의 관점에서 다루는 방법을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.