풀이

STEP I 2002, 문제 10

역학 • 탄성 충돌

STEP I 2002, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s1-q10

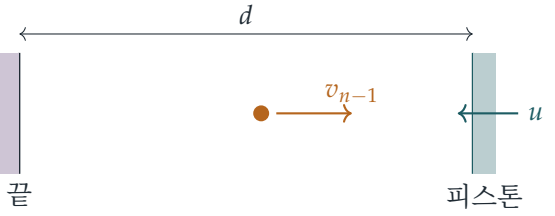
이 문제는 *Beyond STEP*의 10.4 절 **분자 하나와 피스톤**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/piston.html

핵심 아이디어

입자보다 훨씬 무거운 벽과의 완전 탄성 충돌(perfectly elastic collision)은 **상대 속도**(relative velocity)를 뒤집는다. 따라서 피스톤의 기준틀(frame of reference)에서 생각하는 것이 가장 쉽다. 그 기준틀에서는 입자가 그저 정지한 벽에 부딪혀 튕겨 나올 뿐이다. 그러므로 피스톤에 한 번 튕길 때마다 속력이 $2u$만큼 늘어나고, 고정된 끝에 튕길 때는 아무것도 변하지 않는다. 거리에 대해서는, 피스톤과의 두 충돌 사이에 입자와 피스톤이 함께 일정한 패턴의 길이를 이동한다는 점에 주목하자. 이로부터 d_{n+1}을 d_n으로 나타내는 일차방정식 하나를 얻는다.

풀이

공기를 입자로, 피스톤을 충돌의 영향을 받지 않고 일정한 속력 u로 움직이는 벽으로, 실린더의 끝을 고정된 벽으로 모형화한다. 모든 운동은 축을 따라 일어나므로, 실린더의 끝에서 피스톤을 향하는 방향을 양의 방향으로 잡는다.



속력

입자가 속력 w로 피스톤에 다가간다고 하자. 피스톤의 속도는 $-u$이므로, 피스톤에 대한 입자의 상대 속도는 (피스톤을 향하여) $w+u$이다. 밀려나지 않는 벽과의 완전 탄성 충돌에서, $e=1$인 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)에 따르면 상대 속도가 뒤집히므로, 충돌 후 피스톤에 대한 입자의 상대 속도는 $-(w+u)$이다. 그러면 입자의 실제 속도는

$$-u-(w+u)=-(w+2u),$$

이므로, 입자는 속력 $w+2u$로 피스톤에서 멀어진다.

실린더의 고정된 끝에서는 같은 법칙이, 벽이 정지해 있으므로 단지 속도를 뒤집을 뿐이다. 즉 속력은 변하지 않는다. 따라서 피스톤과의 연이은 두 충돌 사이에서 입자의 속력은 일정하게 유지된다.

첫 번째 충돌 전에 입자는 속력 v로 피스톤을 향해 움직이므로 $v_1=v+2u$이다. n번째 충돌 직후 입자의 속력은 v_n이다. 입자는 속력의 변화 없이 끝에서 튕겨 나와 속력 v_n으로 다시 피스톤을 만나고, $v_{n+1}=v_n+2u$의 속력으로 떠난다. 귀납법(induction)에 의하여

$$v_n=v+2nu,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

거리

n번째 충돌과 $(n+1)$번째 충돌 사이(시간 t_n 동안)에 피스톤은 속력 u로 안쪽으로 움직이므로

$$d_n-d_{n+1}=u\,t_n.$$

같은 시간 동안 입자는 일정한 속력 v_n으로 움직이면서 피스톤에서 끝까지(끝은 피스톤이 있던 곳에서 d_n만큼 떨어져 있으므로 거리 d_n) 갔다가, 다시 피스톤까지(피스톤이 지금 있는 곳까지이므로 거리 d_{n+1}) 돌아온다. 따라서

$$d_n+d_{n+1}=v_nt_n.$$

생각해 보기 t_n을 어떻게 없앨 수 있을까?

한 식을 다른 식으로 나눈다. $t_n>0$이므로

$$\frac{d_n+d_{n+1}}{d_n-d_{n+1}}=\frac{v_n}{u}.$$

분모를 양변에 곱하면 $ud_n+ud_{n+1}=v_nd_n-v_nd_{n+1}$이므로

$$(v_n+u)\,d_{n+1}=(v_n-u)\,d_n.$$

$v_n = v + 2nu$이면 $v_n - u = v + (2n-1)u$이고 $v_n + u = v + (2n+1)u$이므로

$$d_{n+1} = \frac{v + (2n-1)u}{v + (2n+1)u}\, d_n,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

d_n에 대한 공식

점화식(recurrence relation)을 반복하여 적용하면

$$d_n = d_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{v + (2k-1)u}{v + (2k+1)u} = d_1 \cdot \frac{v+u}{v+3u} \cdot \frac{v+3u}{v+5u} \cdots \frac{v + (2n-3)u}{v + (2n-1)u}.$$

이 곱은 연쇄적으로 소거된다(telescopes). 각 분모가 다음 분자와 약분되어

$$d_n = \frac{v+u}{v + (2n-1)u}\, d_1.$$

만 남는다. 이 식은 $n = 1$일 때도 성립하며, 이때는 $d_1 = d_1$이 된다.

$v = u$인 경우

$v = u$를 대입하면

$$d_n = \frac{2u}{2nu}\, d_1 = \frac{d_1}{n}.$$

그러면 $ut_n = d_n - d_{n+1}$로부터

$$ut_n = \frac{d_1}{n} - \frac{d_1}{n+1} = \frac{d_1}{n(n+1)},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $u = 0$이면 피스톤은 고정된 벽이다. 이때 공식은 모든 n에 대하여 $v_n = v$와 $d_n = d_1$을 주며, 마땅히 그래야 한다.
- $u = 1$, $v = 3$, $d_1 = 75$로 두자. 공식은 $d_2 = 50$, $d_3 = 37.5$, $d_4 = 30$과 속력 $5, 7, 9, 11$을 예측한다. 튕김 운동을 (유리수 연산으로) 한 단계씩 정확하게 시뮬레이션하면 정확히 이 값들이 나오며, u, v와 출발 위치를 무작위로 200번 골라도 마찬가지로 일치한다.
- $v = u$일 때 $\sum ut_n = d_1 \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = d_1$이다. 즉 피스톤은 전체적으로 정확히 d_1만큼 이동하여 실린더의 끝에 도달하며, 이는 $d_n = d_1/n \to 0$과 일치한다.

흔한 실수

- $d_n - d_{n+1}$을 잘못 사용하는 것. 예를 들어 입자의 왕복 거리를 $2d_n$으로 잡는 경우이다. 그사이에 피스톤이 움직였으므로 돌아오는 구간은 d_{n+1}뿐이다.
- 충돌할 때마다 $2u$가 아니라 u를 더하는 것. 상대 속도가 뒤집히므로, 입자 속도의 변화는 피스톤이 더해 준 접근 속력의 두 배이다.

STEP 너머

충돌할 때마다 입자의 속력은 일정한 양만큼 변하지만, 간격이 좁아질수록 충돌은 더 잦아지고, n이 클 때 곱 $v_n d_n$은 거의 일정하게 유지된다(여기서는 n이 클 때 $v_n d_n \approx (v+u)d_1$). 이처럼 천천히 변하는 보존량을 **단열 불변량**(*adiabatic invariant*)이라 하며, 많은 분자에 대하여 평균을 내면 이것으로 기체를 빠르게 압축할 때 온도가 올라가는 이유를 설명할 수 있다. 1차원에서 천천히 압축하는 경우 $T \propto 1/L^2$이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 기준틀을 더 공부하기에 좋은 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.