풀이

STEP I 2002, 문제 1

순수수학 • 원과 타원

> **STEP I 2002, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q1

핵심 아이디어

두 타원(ellipse)이 실제로 만나는 곳을 찾는다. 두 방정식 모두 y를 y^2의 꼴로만 포함하므로, y^2을 소거하면 x에 대한 이차방정식이 남고, 결국 두 타원은 단 두 개의 실점에서만 교차한다는 것이 드러난다. 주어진 두 점을 지나는 원의 중심은 두 점을 잇는 선분의 수직이등분선(perpendicular bisector) 위에 있으며, 이 사실로부터 원의 방정식은 매개변수가 하나인 족(one-parameter family)으로 정해진다.

풀이

교점 구하기

전개하면 두 타원은 다음과 같다.

$$x^2 + 4x + 2y^2 = 14,$$
$$9x^2 - 18x + 16y^2 = 16.$$

첫째 식에 8을 곱하고 둘째 식을 빼면 y^2이 소거된다.

$$8x^2 + 32x - 9x^2 + 18x = 112 - 16 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 50x + 96 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-2)(x-48) = 0.$$

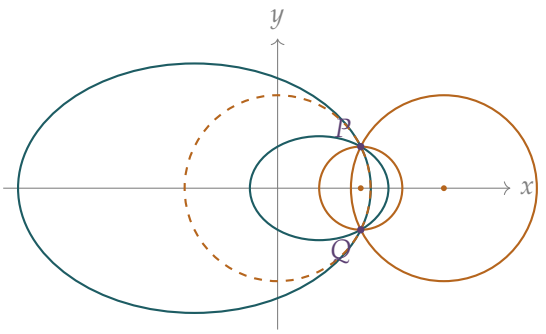
> ? **생각해 보기** 왜 두 근을 그대로 다 받아들일 수 없을까?

각 근은 여전히 실수 y를 주어야 한다. 첫째 타원에서 $2y^2 = 14 - x^2 - 4x$이다.

- ▶ $x = 48$: $2y^2 = 14 - 2304 - 192 < 0$이므로 실점이 없다. (어차피 첫째 타원은 $-2 - 3\sqrt{2} \le x \le -2 + 3\sqrt{2}$ 범위만 차지한다.)

▶ $x = 2$: $2y^2 = 14 - 4 - 8 = 2$이므로 $y = \pm 1$이다.

따라서 두 타원은 정확히 두 점 $P = (2, 1)$과 $Q = (2, -1)$에서 만난다. (두 점 모두 둘째 방정식도 만족한다: $9 + 16 = 25$.)



그림은 두 타원(청록색)과, P와 Q를 지나고 중심이 각각 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$인 세 원(호박색)을 보여 준다.

P와 Q를 지나는 원

P와 Q를 지나는 원의 중심은 두 점에서 같은 거리에 있으므로 PQ의 수직이등분선 위에 있다. 선분 PQ는 수직이고 중점이 $(2, 0)$이므로, 그 수직이등분선은 x축이다. 따라서 중심은 어떤 실수 a에 대해 $(a, 0)$이고, 반지름은 다음을 만족한다.

$$r^2 = (2 - a)^2 + 1^2.$$

그러므로 원의 방정식은

$$\begin{aligned}(x - a)^2 + y^2 &= (2 - a)^2 + 1 \\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 &= 4 - 4a + a^2 + 1 \\ x^2 - 2ax + y^2 &= 5 - 4a,\end{aligned}$$

이고, 이것이 바로 요구된 꼴이다.

역으로, 모든 실수 a에 대해 이 방정식은 중심이 $(a, 0)$이고 반지름이 $\sqrt{(a-2)^2 + 1} > 0$인 진짜 원을 나타내며, $4 - 4a + 1 = 5 - 4a$이므로 $(2, \pm 1)$을 지난다. 따라서 이 족은 정확히 교점들을 지나는 원 전체의 집합이다.

생각해 보기 두 방정식의 일차결합을 취하는 흔한 방법은 어떨까?

$7\times$(첫째 식) $-$ (둘째 식)으로 결합하면 x^2과 y^2의 계수가 같아지고 $x^2 - 23x + y^2 + 41 = 0$을 얻는데, 이는 우리 족에서 $a = \frac{23}{2}$인 원이다. 그러나 이것은 원 하나일 뿐이다. 두 방

정식의 결합은 $x = 48$인 두 허점을 포함한 네 개의 (복소) 공통점을 모두 지나는 이차곡선(conic)들인 반면, 원은 두 실점만 지나면 된다. 그래서 여기서는 직접적인 방법이 필요하다.

검산

- $a = 2$이면 $x^2 - 4x + y^2 = -3$, 즉 $(x-2)^2 + y^2 = 1$이다. 마땅히 그래야 하듯 PQ를 지름으로 하는 원이다.
- $a = 0$이면 $x^2 + y^2 = 5$이고, 실제로 $2^2 + 1^2 = 5$이다.
- $-6 \le x \le 6$ 범위에서 두 타원 위에 동시에 놓인 점을 수치적으로 탐색하면 $x = 2$만 나온다. $(2, 1)$에서 두 타원의 법선(normal)은 각각 $(8, 4)$와 $(18, 32)$ 방향인데, 이 둘은 평행하지 않으므로 두 타원은 그 점에서 접하는 것이 아니라 실제로 교차한다.

흔한 실수

- y가 실수인지 확인하지 않고 $x = 48$을 남겨 두는 것.
- 타원 방정식의 결합으로 원 하나를 만들어 내고 거기서 멈추는 것. 문제는 그 점들을 지나는 **임의의** 원에 대해 묻고 있다.

STEP 너머

두 이차곡선의 결합 $\lambda E_1 + \mu E_2 = 0$을 **속**(pencil)이라 한다. 이는 복소 사영평면(complex projective plane)에서 셸 때 네 공통점을 지나는 이차곡선들로 이루어진다. 이 문제는 그 점들 가운데 일부가 허점일 수 있다는 것, 그리고 원이 특별하다는 것(모든 원은 고정된 두 복소점인 "무한원점의 원형점(circular points at infinity)"을 지난다)을 깔끔하게 상기시켜 준다. 이러한 개념은 사영기하학과 대수기하학(algebraic geometry)에 속한다. 이런 관점에서 평면곡선과 이차곡선을 친절하게 처음 살펴보려면 Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*(학부 대수기하학)를 보면 좋고, Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 스타일의 연습 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.