풀이

STEP III 2001, 문제 9

역학 • 마찰과 단진동

> **STEP III 2001, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q9

핵심 아이디어

두 받침대(beam)는 수평면과 α의 각을 이루는 직선을 따라 d만큼 떨어져 있으므로, 판자는 각 α로 기울어져 놓인다. 판자가 미끄러지면 무게가 B_1에서 B_2로 옮겨 가고, 두 수직항력(normal reaction)은 무게중심(centre of gravity)의 위치에 따라 **선형으로** 변한다. 두 마찰계수(coefficient of friction)가 서로 다르므로 전체 마찰력도 선형으로 변하며, 변위에 비례하는 복원력이 작용하면 운동은 단진동(simple harmonic motion)이 된다. 조건 $\mu_1 + \mu_2 = 2\tan\alpha$는 바로 그 운동의 중심을 두 받침대의 한가운데에 놓는 조건이다.

풀이

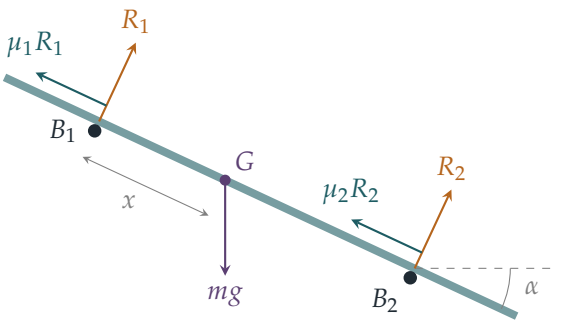
모형

판자를 질량 m인 강체 막대(rigid rod)로 보고, 두 받침대에 계속 닿아 있다고 하자. 받침대는 점으로 본다. B_1에서 B_2까지의 선분의 길이는

$$\sqrt{d^2\sin^2\alpha + d^2\cos^2\alpha} = d$$

이고 수평면과 각 α를 이루므로, 판자는 이 직선을 따라 B_1에서 B_2 쪽으로 내려가는 방향으로 놓인다. 무게중심 G의 B_1로부터의 거리를 판자를 따라 비탈 아래쪽으로 잰 값을 x라 하자. 그러면 놓는 순간 $x = 0$이고, $x = d$일 때 G는 B_2 바로 위에 있다.

$0 \le x \le d$인 동안 G는 두 받침대 사이에 있다. 작용하는 힘은 G에 작용하는 무게 mg, B_1, B_2에서 판자에 수직으로 작용하는 수직항력 R_1, R_2, 그리고 판자가 비탈 아래로 움직이는 동안 비탈 위쪽으로 작용하는 마찰력(friction) $\mu_1 R_1$과 $\mu_2 R_2$이다.



수직항력

판자는 자신에 수직인 방향으로는 움직이지 않으므로, 판자에 수직인 방향으로 힘을 분해하면

$$R_1 + R_2 = mg\cos\alpha.$$

또한 판자는 회전하지도 않으므로, G에 대한 모멘트(moment)를 구하면(무게와 두 마찰력은 G를 지나는 직선이나 판자를 따라 작용하므로 모멘트가 없다)

$$R_1 x = R_2(d - x).$$

이 두 식을 풀면

$$R_1 = \frac{mg\cos\alpha\,(d-x)}{d}, \qquad R_2 = \frac{mg\cos\alpha\,x}{d}.$$

$0 \le x \le d$에서 둘 다 음이 아니므로, 판자는 실제로 두 받침대 위에 계속 놓여 있다.

운동방정식

판자가 비탈 아래로 움직이는 동안 비탈 아래 방향으로 힘을 분해하면

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - \mu_1 R_1 - \mu_2 R_2 \\ &= mg\cos\alpha\left[\tan\alpha - \mu_1 - \frac{(\mu_2-\mu_1)x}{d}\right]. \end{aligned}$$

이제 주어진 조건을 쓰자. $\mu_1 + \mu_2 = 2\tan\alpha$에서 $\tan\alpha - \mu_1 = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)$이다. 따라서

$$\ddot{x} = -\omega^2\left(x - \tfrac{1}{2}d\right), \qquad \text{여기서} \qquad \omega^2 = \frac{g(\mu_2-\mu_1)\cos\alpha}{d} > 0,$$

이고, 이 부등식은 $\mu_2 > \mu_1$이고 $\cos\alpha > 0$이기 때문에 성립한다.

생각해 보기 판자는 실제로 움직이기 시작하는가? 그리고 마찰력은 항상 비탈 위쪽을 향하는가?

$x = 0$에서 $\ddot{x} = \frac{1}{2}\omega^2 d > 0$이므로 판자는 실제로 아래로 미끄러지기 시작한다. 위의 방정식은 $x = \frac{1}{2}d$를 중심으로 하는 단진동이고, $t = 0$에서 $x = 0$, $\dot{x} = 0$이므로 그 해는

$$x = \tfrac{1}{2}d\,(1 - \cos\omega t), \qquad \dot{x} = \tfrac{1}{2}d\,\omega \sin\omega t.$$

$0 < t < \pi/\omega$에서 $\dot{x} > 0$이므로 판자는 그동안 내내 실제로 비탈 아래로 움직이며, 마찰력이 비탈 위쪽으로 작용한다는 가정은 옳았다. 또한 그동안 내내 $0 \le x \le d$이므로 G는 두 받침대 사이에 머물고, R_1, R_2에 대한 식도 계속 유효하다.

정지하기

속도는 $\omega t = \pi$일 때 처음으로 다시 0이 되고, 이때 $x = \frac{1}{2}d(1 - \cos\pi) = d$이다. 즉 무게중심이 B_2 바로 위에 있다. 이 순간 $R_1 = 0$이고 $R_2 = mg\cos\alpha$이므로 판자는 B_2 하나에만 얹혀 있다. 판자는 그 상태로 정지해 있는데, B_2에서의 마찰력은 최대 $\mu_2 mg\cos\alpha$까지 낼 수 있고 무게의 비탈 아래 방향 성분은 $mg\sin\alpha$이며

$$\mu_2 = \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) + \tfrac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1) > \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) = \tan\alpha.$$

이기 때문이다. 따라서 판자는

$$\frac{\pi}{\omega} = \pi\left(\frac{d}{g(\mu_2 - \mu_1)\cos\alpha}\right)^{\frac{1}{2}},$$

의 시간이 지난 뒤 무게중심이 B_2 위에 놓인 채로 정지하며, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- $\mu_2 - \mu_1$이 작으면 판자는 거의 감속하지 않고 시간이 오래 걸리는데, 공식도 그렇게 말해 준다. 이때 각 μ는 $\tan\alpha$에 가까우므로 알짜힘이 어디에서나 0에 가깝다.
- 임의의 α, d, μ_1(단, $\mu_2 = 2\tan\alpha - \mu_1$)에 대해 운동방정식을 수치적으로 단계별로 계산하고, 속도가 처음으로 다시 0이 될 때 멈추었다. 예를 들어 $\alpha = 0.7$, $d = 2$, $\mu_1 = 0.3$, $g = 9.8$이면 예측되는 시간은 약 1.56초이다. 모든 경우에 정지 시각과 위치는 π/ω 및 $x = d$와 (상대오차) 10^{-5} 이내로 일치했다.

흔한 실수

- $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}mg\cos\alpha$로 놓는 것. 수직항력은 G의 위치에 따라 달라지며, 바로 그 의존성이 진동을 만들어 낸다.
- 판자가 그 뒤에도 정지해 있는지 확인하지 않고 "속도가 0이다"에서 멈추는 것. $\mu_2 \ge \tan\alpha$임을 보여야 한다.

STEP 너머

이 운동은 하중에 따라 변하는 마찰력이 "용수철" 역할을 하는 진동자의 반주기이다. 마찰력이 위치나 속도에 따라 달라지는 계는 풍부한 현상을 보이는데, 삐걱거리는 경첩이나 활로 켜는 바이올린 현 뒤에 숨은 스틱-슬립 진동(stick–slip oscillation)도 그중 하나이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰, 강체의 평형, 단진동을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.