풀이

STEP III 2001, 문제 8

순수수학 • 복소평면 위의 자취

> **STEP III 2001, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q8

핵심 아이디어

$z = x + \mathrm{i}y$로 놓고 전개하면 (i)의 두 방정식은 모두 같은 원으로 정리된다. (ii)의 편각(argument) 조건에 대해서는 $\frac{z-2}{z}$를 직접 계산한다. 편각이 $\frac{\pi}{4}$라는 것은 "실수부와 허수부가 같고, 둘 다 양수"라는 뜻이므로, 결국 다시 같은 원에 부등식 하나가 더해진 것이다. (iii)에서는 원의 여러 형태 중 계산이 가장 깔끔해지는 것에 $z = 2/w$를 대입한다. (i)의 두 번째 형태는 바로 이 목적을 위해 주어진 것이다.

풀이

소문항 (i)

$z = x + \mathrm{i}y$라 하자. 첫 번째 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \iff x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

이다. 두 번째 방정식은

$$\begin{aligned} & (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2[(x-1)^2 + y^2] \\ \iff\ & x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 2x^2 + 2y^2 - 4x + 2 \\ \iff\ & 0 = x^2 + y^2 - 2x - 2y. \end{aligned}$$

이다. 각 단계는 거꾸로도 성립하므로, 두 방정식은 모두 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$과 동치이고 같은 자취(locus)를 나타낸다. 이 자취는 중심이 $1 + \mathrm{i}$이고 반지름이 $\sqrt{2}$인 원이다. 이 원은 $0, 2, 2\mathrm{i}$ (그리고 $2 + 2\mathrm{i}$)를 지나며, 가장 낮은 점은 실수축 바로 아래에 있는 $1 + (1 - \sqrt{2})\mathrm{i}$이다.

소문항 (ii)

$z \neq 0$일 때,

$$\frac{z-2}{z} = \frac{(z-2)\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x^2+y^2-2x+2\mathrm{i}y}{x^2+y^2},$$

이다. 왜냐하면 $(z-2)\bar{z} = |z|^2 - 2\bar{z} = x^2+y^2-2x+2\mathrm{i}y$이기 때문이다.

> **생각해 보기** arg(어떤 수) $= \frac{\pi}{4}$라는 것은 그 수의 실수부와 허수부에 대해 정확히 무엇을 말해 주는가?

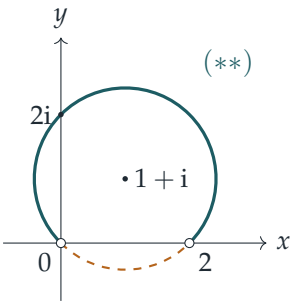
0이 아닌 복소수 $a+\mathrm{i}b$의 편각이 $\frac{\pi}{4}$인 것은 그 수가 반직선(ray) $a = b > 0$ 위에 있을 때, 그리고 그때에만이다. 같다는 것만으로는 충분하지 않다. $a = b < 0$이면 편각은 $-\frac{3\pi}{4}$가 된다. 분모 x^2+y^2은 양수이므로, $(**)$가 성립할 필요충분조건은

$$x^2+y^2-2x = 2y \quad \text{이고} \quad 2y > 0,$$

즉 z가 (i)의 원 위에 있으면서 $y > 0$인 것이다. 조건 $y > 0$은 몫이 정의되지 않는 $z = 0$과, 몫이 0이 되어 편각이 없는 $z = 2$를 자동으로 제외한다.

따라서 $(**)$는 원에서 실수축 위쪽 부분을 나타낸다. 즉 0에서 출발하여 2i와 $2+2\mathrm{i}$를 거쳐 2에 이르는 우호(major arc)이며, 양 끝점은 제외된다. 실수축 아래쪽의 짧은 호에서는 편각이 $-\frac{3\pi}{4}$가 된다.

이는 기하학적으로도 맞아떨어진다. $\arg\frac{z-2}{z}$는 z에서 0과 2로 그은 두 현 사이의 각이다. 0과 2를 잇는 현은 중심 $1+\mathrm{i}$에 대해 직각을 이루므로, 원주각과 중심각의 정리(angle-at-the-centre theorem)에 의해 우호 위의 모든 점에서 $\frac{\pi}{4}$의 각을 이룬다.



원 전체가 $(*)$이고, 실선으로 된 호(끝점 0과 2는 제외)가 $(**)$이며, 점선으로 된 호는 $(**)$에 속하지 않는다.

소문항 (iii)

$w = 2/z$이므로 $z \neq 0$이고 $z = 2/w$이다. 원의 두 번째 형태 $|z-(1-\mathrm{i})|^2 = 2|z-1|^2$을 이용하자. 대입하면

$$z-1 = \frac{2-w}{w}, \qquad z-(1-\mathrm{i}) = \frac{2-(1-\mathrm{i})w}{w} = \frac{(1-\mathrm{i})[(1+\mathrm{i})-w]}{w},$$

이다. 여기서 $\frac{2}{1-\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}$를 이용했다. $|1-\mathrm{i}|^2 = 2$이므로 방정식은

$$\frac{2\,|w-(1+\mathrm{i})|^2}{|w|^2} = \frac{2\,|w-2|^2}{|w|^2} \iff |w-(1+\mathrm{i})| = |w-2|.$$

이 된다. 따라서 w는 $1+\mathrm{i}$와 2에서 같은 거리에 있고, 그 자취는 두 점을 잇는 선분의 수직이등분선(perpendicular bisector)이다. 중점은 $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$이고 선분의 방향은 $1-\mathrm{i}$이므로, 수직이등분선의 방향은 $1+\mathrm{i}$이다. $w = u+\mathrm{i}v$로 놓으면 자취는 직선

$$v = u-1.$$

이다. 이 직선 위의 모든 점이 실제로 나타난다. 0은 이 직선 위에 있지 않으므로 직선 위의 각 w는 0이 아니며, 위의 가역적인 단계들에 의해 $z = 2/w$는 $(*)$를 만족한다. 원 위에서 상(image)이 없는 유일한 점은 $z = 0$이며, 이 점은 "무한대로 보내진다". 원점을 지나는 원은 $w = 2/z$에 의해 직선으로 옮겨지는데, 예상한 그대로이다.

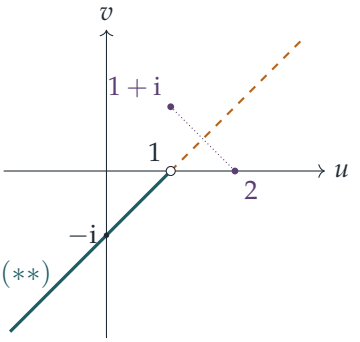
$(**)$에 대응하는 부분을 구하기 위해

$$\frac{z-2}{z} = 1-\frac{2}{z} = 1-w,$$

임에 주목하자. 따라서 $(**)$는 $\arg(1-w) = \frac{\pi}{4}$, 즉 $r>0$에 대해 $1-w = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$가 된다. 그러므로

$$w = 1-\frac{r}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}), \qquad r>0,$$

이고, 이것은 직선 $v = u-1$ 중에서 $w = 1$ (제외)에서 시작하여 왼쪽 아래로 뻗는 반직선, 즉 $u<1$, 다시 말해 $v<0$인 점들이다. 이는 (ii)와 일치한다. $\mathrm{Im}\,w = -2y/|z|^2$이므로 $y>0$은 $v<0$에 대응한다. 예를 들어 $z = 2\mathrm{i}$는 $w = -\mathrm{i}$로 옮겨지고, $z = 2$는 제외된 끝점 $w = 1$로 옮겨진다.



직선 $v = u - 1$ 전체가 $(*)$의 상이고, 실선으로 된 반직선($u < 1$, $w = 1$은 제외)이 $(**)$의 상이다. 점선으로 된 선분은 이 직선이 이등분하는 두 점을 잇는다.

검산

- $z = 2\mathrm{i}$는 원 위에 있고 실수축 위쪽에 있다. $\frac{2\mathrm{i}-2}{2\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$이고, 그 편각은 $\frac{\pi}{4}$이다. 그 상 $w = -\mathrm{i}$는 $u < 1$이면서 $v = u - 1$을 만족한다.
- 원의 가장 높은 점 $z = 1 + (1 + \sqrt{2})\mathrm{i}$는 $w \approx 0.2929 - 0.7071\mathrm{i}$로 옮겨지며, 실제로 $0.2929 - 1 = -0.7071$이다.
- 실수축 아래의 점 $z = 1 + (1 - \sqrt{2})\mathrm{i}$에서는 $\arg \frac{z-2}{z} = -\frac{3\pi}{4}$이다. 그 상은 $u > 1$이어서 직선의 나머지 절반 위에 있다.

흔한 실수

- $\arg Z = \frac{\pi}{4}$를 단지 $\mathrm{Re}\, Z = \mathrm{Im}\, Z$로 보고 원 전체라고 주장하는 것. 두 부분이 모두 양수라는 조건도 필요하다.
- (ii)에서 $z = 0$과 $z = 2$를, 또는 (iii)에서 $w = 1$을 제외하는 것을 잊는 것.
- 원의 상이 또 다른 원일 것이라고 기대하는 것. $w = 2/z$에 의해 원점을 지나는 원은 직선으로 옮겨진다.

STEP 너머

사상 $w = 2/z$는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이다. 이러한 사상은 원과 직선을 원과 직선으로 옮기며, 원이 직선으로 옮겨지는 것은 그 원이 무한대로 보내지는 점을 지날 때, 그리고 그때에만이다. 여기서 호의 끝점 0과 2는 각각 ∞와 1로 옮겨진다. 이 두 끝점이 이루는 각을 재는 몫 $\frac{z-2}{z-0}$은 $1 - w$, 즉 상의 점에서 1을 향하는 방향이 된다. 이것이 (ii)의 호가 (iii)에서 반직선이 되는 이유이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.